Geometrie der Wirklichkeit

Teil 2

Die Primzahlmaschine

Vom Streichholzspiel zur Halblinie

Thomas Krause

Band 2

2026

Für alle, die geahnt haben,
dass die Primzahlen eine Gestalt haben.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **xiii**

Prolog **1**

I Der Umweg und die Grundlage **4**

1 Was Band 1 offen ließ **5**

1.1 Drei physikalische Fäden und ein arithmetischer Faden 6

1.2 Warum Arithmetik, und warum jetzt 6

1.3 Was der Leser erwarten sollte 7

Technischer Anhang: Kapitel 1 8

2 Der Umweg und warum er nötig war **10**

2.1 Der Plan und das Hindernis 11

2.2 Was der Umweg hervorbrachte 11

2.3 Wo die Physik zurückkehrt 12

Technischer Anhang: Kapitel 2 13

3 Mathematische Grundlagen von Teil I 14

3.1 Das Spiel als formales Objekt 14

3.2 Der Streifen, die Adresse und die Restklassenabbildung 17

3.3 Die acht teilerfremden Klassen als Gruppe 18

3.4 Was Teil I etabliert hat 20

II Das Fundament 21

4 Das Streichholzspiel 22

4.1 Die Regeln 23

4.2 Vom Spiel zum Satz von Bertrand 26

4.3 Warum dies nicht zirkulär ist 26

4.4 Der erste nichttriviale Satz 27

Technischer Anhang: Kapitel 4 28

5 Adressen im Streichholzspiel 30

5.1 Die Basisadresse: Restklassen modulo 30 31

5.2 Die vollständige Adresse 31

Technischer Anhang: Kapitel 5 32

6 Der 16-Zeller und die acht Restklassen 33

6.1 Von Restklassen zu einem Polytop 34

6.2 Die acht Klassen als Gruppe 34

6.3 Warum der 16-Zeller die richtige Heimat ist 35

Technischer Anhang: Kapitel 6 39

7 Die vier Säulen 41

7.1 Die vier Säulen benannt 42
7.2 Welche Säule welche Klasse trägt 42
7.3 Eigenständige Behauptung 43
Technischer Anhang: Kapitel 7 44

8 Algebraische Schichten unter der Geometrie 46
8.1 Die vier Sprachen 47
8.2 Warum wir keine fünfte brauchen 47
Technischer Anhang: Kapitel 8 48

9 Die Primzahlmaschine 50
9.1 Der achtfache Stern als Draufsicht 51
9.2 Die drei Verfeinerungsschritte 52
9.3 Die Reichweite der Maschine 52
Technischer Anhang: Kapitel 9 53

10 Vollständigkeit und das Teufelsspiel 55
10.1 Der Zug des Teufels 56
10.2 Die drei technischen Punkte 56
Technischer Anhang: Kapitel 10 57

11 Reichweite — die Repunit-Spirale 58
11.1 Repunits und ihre Restklassen 59
11.2 Die Spirale 59
11.3 Zwei offene Probleme 60
Technischer Anhang: Kapitel 11 60

12 Mathematische Grundlagen von Teil II: Sätze und Beweise 62

12.1 Primzahläquivalenz 62
12.2 Eindeutigkeit des 16-Zellers 64
12.3 Vier-Säulen-Vollständigkeit 66
12.4 Der Satz von Bertrand 68
12.5 Vollständigkeit des Teufelsspiels 71
12.6 Was Teil II etabliert hat 74

III Anwendungen **76**

13 Bertrandsches Postulat **77**
13.1 Zwischen jeder Zahl und ihrem Doppelten liegt eine Primzahl 77
Technischer Anhang: Kapitel 13 79

14 Der Satz von Fermat und die Vollständigkeit der Maschine **83**
14.1 Die zweite Grundgarantie 83
Technischer Anhang: Kapitel 14 85

15 Primzahlzwillinge **87**
15.1 Zwei Primzahlen, zwei Streichhölzer voneinander entfernt 87
15.2 Das Kantenbild des Kreuzpolytops 89
15.3 Die multiplikative Formel 90
Technischer Anhang: Kapitel 15 91

16 Goldbach auf dem Kreuzpolytop **94**
Technischer Anhang: Kapitel 16 96

17 Polignac-Lücken als Sehnen **102**

Technischer Anhang: Kapitel 17 104

18 Hardy-Littlewood-Konstellationen 108

Technischer Anhang: Kapitel 18 110

19 C_2 als Kantendichte 114

Technischer Anhang: Kapitel 19 116

20 Collatz auf der Primorial-Hierarchie 118

Technischer Anhang: Kapitel 20 121

21 Zeta-Minima auf der Halblinie 125

Technischer Anhang: Kapitel 21 128

22 Die Halblinie: Vier zusammenfallende Hälften 133

Technischer Anhang: Kapitel 22 135

23 Vollständiger Atlas der Primzahlfamilien 139

Technischer Anhang: Kapitel 23 142

IV Algebraische Schichten 147

24 Der Schatten: Wie die Maschine eine Riemann-ähnliche Silhouette wirft 148

24.1 Die zwei Basen 150

24.2 Die Weil–Guinand-Testfunktionsbrücke 151

24.3 Fourier-Positivität 152

Technischer Anhang: Kapitel 24 153

25 Vier physikalische Sprachen 156

25.1 Renormierungsgruppe 158
25.2 Spektrale Graphentheorie 160
25.3 Reziprozität 160
25.4 Quantenmechanik 161
Technischer Anhang: Kapitel 25 162

26 Nicht-Lokalität als strukturelle Signatur 166
26.1 Kein lokales Funktional erzeugt das Orbit-Minimum . 167
26.2 Drei physikalische Bilder 168
26.3 Blockade des Collatz-Zyklus: ein zweites Beispiel . . . 169
Technischer Anhang: Kapitel 26 170

27 Verbindung zur ATOE 173
27.1 Die 103-Anomalie 174
27.2 Die Halblinie als Verbindungsstelle 175
27.3 Das Getriebesystem als RG-Fluss 175
27.4 Drei physikalische Konstanten 176
27.5 Natur als Primzahlresonanz 176
Technischer Anhang: Kapitel 27 177

28 Ausblick: Offene Forschungspfade 179
28.1 Elf offene physikalische Resonanzen 180
28.2 Strukturelle Analogien vom Rang eins 182
28.3 Blockade des Collatz-Zyklus als offener Pfad 183
28.4 Zwei offene Brücken zur Welt Riemanns 183

Epilog 185

A Vollständige Evidenztabellen 189

A.1 Bahnminima und Reichweite (Bertrand) 189
A.2 Primzahlzwillings-Kanten (Kapitel 15) 190
A.3 Goldbach-Antipoden (Kapitel 16) 190
A.4 Zeta-Minima und die kritische Linie (Kapitel 21) . . . 191
A.5 Fairer Vergleich auf Ebene $k = 300$ (Kapitel 21) 191
A.6 Collatz auf der Primorial-Hierarchie (Kapitel 20) . . . 195

Glossar **196**

Bibliographie **200**

Vorwort

Band 1 fragte, woher die Materie kommt. Er gab eine geometrische Antwort und hinterließ eine Reihe offener Fäden. Einer dieser Fäden war auf den ersten Blick klein, wuchs aber zu einem eigenen Buch heran: die Primzahlen.

Dieser Band ist dieses Buch. Er verfolgt ein einziges Objekt von Anfang bis Ende. Wir nennen dieses Objekt die **Primzahlmaschine**. Sie ist kein Computerprogramm und keine Formel. Sie ist eine rein geometrische Konstruktion: ein Spiel mit Streichhölzern, das dann in höhere Dimensionen erweitert und schließlich als eine Kette von Schatten gelesen wird. Jeder Schritt ist elementar. Jeder Schritt lässt sich auf Papier zeichnen.

Das Buch hat zwei Ebenen. Der Haupttext richtet sich an einen neugierigen Leser mit Schulmathematik. Jedes Kapitel erzählt seine Geschichte in Worten, mit kleinen Abbildungen und einer durchgehenden Analogie in einem farbigen Kasten. Am Ende jedes Kapitels liefert ein kürzerer **technischer Anhang** die vollständige Herleitung für den Leser, der die Beweise sehen möchte. Die beiden Ebenen sind strikt ge-

trennt: Man kann die Erzählung lesen und die Anhänge überspringen, und die Geschichte bleibt vollständig.

Was der Leser beim Lesen entdecken wird: Dieselbe Gestalt kehrt aus vielen unterschiedlichen Richtungen wieder. Primzahlzwillinge, Goldbach, Polignac, Collatz und die Nulllinie der Riemannschen Zetafunktion — jedes sieht wie ein eigenständiges Problem aus, aber jedes wird innerhalb der Maschine zu einer Aussage über dieselbe achtfache Struktur. Die Magnete in den Analogie-Kästen sind keine bloße Verzierung. Am Ende des Buches sollte der Leser sie als ein zutreffendes Bild dessen erkennen, was die Geometrie tatsächlich bewirkt.

Der Band schließt mit zwei Atlanten und einem kurzen Ausblick. Die Atlanten fassen zusammen, wie weit die Maschine derzeit reicht; der Ausblick benennt, was noch offen bleibt. Physik wird nur als Horizont erwähnt — Band 3 ist der natürliche Ort für diesen Schritt.

Thomas Krause, Lübeck, 2026

Prolog

Eine Primzahl ist ein widerspenstiges Objekt. Sie widersteht den Werkzeugen der Algebra. Sie widersteht den Werkzeugen der Analysis, bis diese Werkzeuge an ihre Grenzen gedrängt werden. Und sie widersteht der Intuition jedes, der versucht, sie als etwas anderes zu sehen als eine Zahl, die sich der Faktorisierung verweigert.

Dieses Buch geht einen anderen Weg. Es ersetzt die Zahl durch ein Stück Geometrie. Nicht ein auf Papier gezeichnetes Bild, sondern eine Gestalt, die gebaut, von vielen Seiten untersucht und gezwungen werden kann, zu offenbaren, was sie tut. Diese Gestalt heißt **die Primzahlmaschine**. Sie wächst Schritt für Schritt aus einem einfachen Ausgangspunkt — einem Streichholzspiel auf der Zahlengeraden — zu einem vierdimensionalen Objekt mit einer unerwartet reichen inneren Struktur heran.

Der Weg vom Streichholzspiel zu den tiefen Bereichen der Zahlentheorie ist länger, als man erwarten würde. Er führt durch acht Restklassen, ein Sechzehn-Zellen-Polytop und ein Gitter von Tick-Operatoren. Er führt zu Fragen, die seit zwei oder drei Jahrhunderten offen sind: das Bertrandsche Postulat, der Satz von Fermat in seiner

geometrischen Lesart, die Primzahlzwillings-Vermutung, Goldbach, Polignac, die Hardy-Littlewood-Konstellationen, die Primzahlzwillings-Konstante, Collatz. Und er führt noch weiter, an einen unerwarteten Ort: die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion.

An keiner Stelle behauptet dieses Buch, all diese Fragen abschließend zu lösen. Manche von ihnen, wie Collatz und Riemann, bleiben im strengen formalen Sinne offen. Was das Buch behauptet, ist bescheidener und in gewissem Sinne nützlicher. Es behauptet, dass ein einziges geometrisches Objekt — aus den einfachst möglichen Regeln aufgebaut — alle diese Probleme in einer Hand halten kann. Jede Vermutung wird zu einer Frage über dieselbe Geometrie, betrachtet durch einen anderen Filter. Das ist die tiefere Bedeutung des Titels: Dies ist keine Maschine zum Berechnen von Primzahlen, sondern eine Maschine, um die klassischen Probleme an einem Ort **zusammenzuhalten**, in einer Gestalt, die jeder betrachten kann.

Der Stil des Buches folgt dieser Idee. Jedes Kapitel hat zwei Ebenen. Die erste ist eine erzählende Lesart — was die Maschine tut, in Worten, mit Analogien. Die zweite ist ein strenger technischer Abschnitt, gekennzeichnet und abgesetzt, der den vollständigen Beweis oder die vollständige Konstruktion trägt. Der Leser kann auf der erzählenden Ebene bleiben und die Geschichte verstehen. Der Leser, der die Argumente überprüfen möchte, kann an jeder Stelle in die technische Ebene hinabsteigen, und dort ist alles vollständig.

Das Buch ist in sich abgeschlossen. Es setzt nicht voraus, dass der Leser Band 1 gelesen hat, obwohl sich die beiden Bände ergänzen: Band 1 baute eine Geometrie für die Materie, und dieser Band baut eine Geometrie für Primzahlen. Auffallend ist, dass dieselbe Denkweise — **zuerst die Gestalt suchen, dann die Algebra von der Gestalt ablesen** — in beiden Fällen funktioniert.

Eine kurze Warnung. Der Leser sollte nicht erwarten, dass sich Symbole so verhalten wie in einem Lehrbuch. Wenn wir in der Maschine von einer „Primzahl“ sprechen, meinen wir ein Objekt, das die

Maschine anhand ihrer eigenen Geometrie als prim erkennt. Wenn wir von einer „Achse“ oder einer „Halblinie“ sprechen, meinen wir ein geometrisches Merkmal, das die Maschine von sich aus erzeugt, nicht eine von uns gewählte Koordinate. Das Buch versucht, innerhalb der eigenen Sprache der Maschine zu bleiben. Das lässt manche Passagen zunächst ungewohnt wirken. Es lohnt sich: Am Ende des Buches werden die klassischen Probleme wie Merkmale einer einzigen Landschaft aussehen, und die Landschaft wird vertraut wirken.

Der letzte Teil des Buches (Teil IV) ist ein Schritt zurück. Er fragt, was die Geometrie bedeutet. Er zeigt, wie die Maschine eine Riemann-ähnliche Silhouette wirft, wie sie vier physikalische Sprachen zugleich spricht, und wie sie sich mit der umfassenderen, in Band 1 skizzierten Theorie von allem verbindet. Diese Kapitel sind spekulativer als die Mitte des Buches und werden entsprechend gekennzeichnet. Sie öffnen Forschungswege, anstatt sie zu schließen.

Das Buch ist all jenen gewidmet, die jemals auf die Folge $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ geblickt und gespürt haben, dass eine verborgene Geometrie dahinterstehen muss. Es ist mein Versuch, diese Geometrie sichtbar zu machen.

Thomas Krause
Lübeck, 2026

Teil I

Der Umweg und die Grundlage

KAPITEL 1

Was Band 1 offen ließ

Band 1 baute eine Geometrie für die Materie. Er führte von einem ersten Tick bis zu den Elementarteilchen, und er tat dies, indem er eine kleine Handvoll Ideen eine Leiter hinauftrug. Oben auf dieser Leiter gab es offene Fäden. Drei davon waren physikalische Fäden: die Feinstrukturkonstante, die Massenhierarchie, der Higgs-Sektor. Ein Faden war rein arithmetisch. Er wirkte fehl am Platz neben den anderen, und ich hätte ihn fast fallen lassen.

Der arithmetische Faden war dieser: Tief im Mechanismus von Band 1 gibt es eine Stelle, an der Primzahlen von sich aus auftauchen, ohne eingeladen zu sein. Sie erscheinen als die natürliche Buchhaltung eines selbstreferentiellen Prozesses. Band 1 benutzte sie, erklärte aber nicht, warum sie überhaupt eine Gestalt haben sollten. Die Gestalt war das fehlende Puzzleteil.

Dieser Band ist die Antwort auf dieses fehlende Puzzleteil.

Die unbezahlte Rechnung

Man kann sich Band 1 als ein Haus vorstellen, das gebaut und bezogen wurde. Es ist warm, die Türen schließen, das Licht funktioniert. Aber auf dem Küchentisch liegt ein einziger kleiner Umschlag, der nie geöffnet wurde. Es ist eine Rechnung — nicht dringend, nicht groß, aber die Adresse auf dem Umschlag ist die Adresse des Hauses selbst. Man kann sie nicht wegwerfen. Früher oder später muss sie geöffnet werden. Dieses Buch öffnet den Umschlag.

1.1 Drei physikalische Fäden und ein arithmetischer Faden

Die drei physikalischen Fäden von Band 1 — die Feinstrukturkonstante, die Massenhierarchie, der Higgs-Sektor — teilen ein gemeinsames Merkmal. Sie handeln alle von Zahlen, die Materie beschreiben. Es sind Fragen der Form „Warum ist diese Zahl, was sie ist?"

Der arithmetische Faden ist anders. Er fragt nicht nach einer einzelnen Zahl. Er fragt nach einer **Folge**: den Primzahlen. Die Primzahlen sind keine physikalische Größe. Sie sind ein rein mathematisches Objekt. Und dennoch tauchten sie innerhalb einer physikalischen Konstruktion auf, als wären sie ein Stück desselben Gewebes.

Das ist eine merkwürdige Tatsache. In der zweiten Hälfte von Band 1 habe ich die Tatsache vermerkt und bin weitergegangen. Dieser Band ist das, was geschieht, wenn man zurückgeht und sie ernst nimmt.

1.2 Warum Arithmetik, und warum jetzt

Es gibt einen Grund, warum der arithmetische Faden warten musste. Die physikalischen Fäden können gegen Messungen geprüft werden. Eine Vorhersage für die Feinstrukturkonstante stimmt entweder mit

dem Experiment überein oder nicht. Eine arithmetische Aussage über die Primzahlen ist anders. Sie muss bewiesen werden. Sie kann nicht durch ein Experiment überprüft werden, denn die Primzahlen befinden sich nicht in einem Labor draußen — sie stecken im Zahlensystem selbst.

Ein Beweis erfordert eine andere Art von Werkzeug. In Band 1 war das Hauptwerkzeug ein geometrisches Bild. Es stellte sich unerwartet heraus, dass dieselbe Art von Bild auch für die Primzahlen funktioniert. Nicht durch Analogie — durch Struktur. Das ist die Entdeckung, die dieses Buch möglich machte.

> Band 1 brauchte eine Geometrie, um die Materie verständlich zu machen. Band 2 wird dieselbe Art von Geometrie — Linien, Punkte, Faltungen, Projektionen — benutzen, um die Primzahlen verständlich zu machen. Es wird nichts Exotisches hinzugefügt. Die Werkzeuge lagen bereits auf dem Tisch.

1.3 Was der Leser erwarten sollte

Der Rest dieses Buches ist ein langsamer Aufbau. Er beginnt mit etwas, das wie ein Kinderspiel aussieht — das Auslegen von Streichhölzern — und endet mit Aussagen über die Riemannsche Zetafunktion. Zwischen diesen beiden Enden liegt ein einziges Objekt, die Primzahlmaschine, und eine einzige Methode: die Geometrie bewahren, keine klassischen analytischen Tricks einschmuggeln, und sehen, wie weit das Bild trägt.

Wir werden feststellen, dass es überraschend weit trägt. Der Satz von Bertrand, die Goldbachsche Vermutung, die Vermutung über Primzahlzwillinge, die Polignac-Vermutung, die Hardy–Littlewood-Konstellationsvermutungen, die Collatz-Vermutung und die Lage der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion fallen alle in dasselbe Bild. In jedem Fall liefert die Maschine eine unbedingte untere Schranke der

richtigen Art, und in jedem Fall erklärt das Bild, **warum** die Schranke die Form hat, die sie hat.

Das ist die Gestalt des Buches. Der Rest von Teil A erzählt die Geschichte des Umwegs, der hierher führte.

Technischer Anhang: Kapitel 1

Formal betrachtet sitzt der arithmetische Faden von Band 1 auf der Ebene dessen, was wir die „selbstreferentielle Basis"nannten. Ein tickender selbstreferentieller Prozess braucht eine Buchhaltung seiner eigenen multiplikativen Struktur. Die Primzahlen sind, aus der Sicht dieser Buchhaltung selbst, die Atome der Multiplikation: die Zahlen, die innerhalb der Multiplikation nicht weiter aufgespalten werden können. In Band 1 wurde diese Tatsache implizit verwendet (Kapitel 11 von Band 1). Sie erhielt nie ihr eigenes geometrisches Objekt.

Die Aufgabe von Band 2 ist es, dieses Objekt explizit zu konstruieren. Wir werden es in Kapitel 4 (das Streichholzspiel) definieren, ihm in Kapitel 5 Adressen geben, es in Kapitel 6 in ein vierdimensionales Polytop einbetten, und in Kapitel 7 seine vier algebraischen Säulen identifizieren. Alles nach Kapitel 7 ist eine Folge dieser ersten vier Konstruktionen.

Wir halten, der Ordnung halber, die vier Behauptungen fest, die der Rest des Buches rechtfertigen wird:

(A) Jede Primzahl größer als 5 gehört zu genau einer von acht Restklassen mod 30. Dies ist keine Definition, sondern eine Folge des Spiels.

(B) Diese acht Klassen sind die Ecken eines vierdimensionalen Polytops — des 16-Zellers. Keine Metapher: eine strikte Identifikation.

(C) Die Maschine hat eine unvermeidliche Konzentrationsrate der Form $k^{-1/2}$, wobei k die Iterationstiefe ist. Dieselbe Rate tritt in vier

unabhängigen Kontexten auf, die alle in dieselbe Richtung weisen. Dies wird zur Magnet-Analogie von Kapitel 20 werden.

(D) Jede klassische Vermutung, die wir testen — Goldbach, Zwillinge, Polignac, HL-Konstellationen, Collatz — ist eine Aussage über dasselbe Objekt, betrachtet von einer anderen Seite.

Diese vier Behauptungen werden in diesem Kapitel nicht bewiesen. Sie sind die Ausgangspunkte der vier Teile des Buches.

KAPITEL 2

Der Umweg und warum er nötig war

Der ursprüngliche Plan für Band 2 war ein anderer. Als Band 1 fertiggestellt war, bestand die Absicht darin, die physikalische Erzählung fortzusetzen — Band 2 mit dem Higgs-Sektor zu beginnen und weiter in die zweite und dritte Generation der Materie vorzudringen. Die Primzahlen sollten nur eine Fußnote in einem Anhang sein.

Auf dem Weg geschah etwas, das diesen Plan unmöglich machte. Dieses Kapitel erzählt diese Geschichte, kurz. Der Leser, der es kaum erwarten kann, zur Mathematik zu kommen, kann ohne Verlust zu Kapitel 4 springen.

Die falsche Tür zuerst

Wenn man einen Raum in einem großen Haus erreichen will, muss man manchmal zuerst die falsche Tür ausprobieren. Nicht weil man unvorsichtig ist, sondern weil die richtige Tür hinter der falschen verborgen liegt. Sobald man die falsche Tür geöffnet

und hineingeschaut hat, erkennt man, dass die richtige Tür die ganze Zeit direkt daneben war. Der Umweg war nicht vergeudet — er war der einzige Weg, den Grundriss zu sehen.

2.1 Der Plan und das Hindernis

Der Plan war, einen Band 2 zu schreiben, der um drei Kapitel organisiert ist:

1. Higgs.
2. Zweite und dritte Generation.
3. Vorhersagen.

Das Hindernis erschien innerhalb des Higgs-Kapitels. Um es zu schreiben, braucht man eine klare Aussage über die „Massenleiter", und um die Leiter klar zu formulieren, muss man wissen, welche diskreten Sprünge erlaubt sind. Die Sprünge sind nicht frei — sie werden von einer arithmetischen Struktur indiziert. Und diese Struktur bestand, als ich sie genauer betrachtete, aus Primzahlen.

An diesem Punkt hatte das Buch zwei Möglichkeiten. Die erste: die arithmetische Struktur postulieren und weitermachen. Das ist es, was die Arbeiten des physikalischen Fadens implizit getan hatten, und es war brauchbar. Die zweite: anhalten und die arithmetische Struktur von unten herleiten. Ich entschied mich für die zweite, und dieses Buch ist das Ergebnis.

2.2 Was der Umweg hervorbrachte

Der Umweg erwies sich als produktiv, auf eine Weise, die der ursprüngliche Plan nicht war. Er brachte nacheinander eine Handvoll eigenständiger Ergebnisse hervor:

- Eine geometrische Charakterisierung der Primzahlen größer als 5 als Ecken eines vierdimensionalen Polytops.
- Eine unbedingte untere Schranke der richtigen Größenordnung für die Anzahl der Goldbach-Darstellungen.
- Eine unbedingte untere Schranke der richtigen Größenordnung für die Anzahl der Primlücken jeder festen geraden Größe (Polignac).
- Eine unbedingte untere Schranke für Primzahlzwillinge und für die höheren Hardy–Littlewood-Konstellationen.
- Eine geometrische Herleitung des Satzes von Bertrand.
- Eine geometrische Einbettung der Collatz-Iteration in dasselbe Polytop.
- Eine geometrische Herleitung der Konzentrationsrate der nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion um die Gerade $\Re s = 1/2$.

Jedes davon wurde als eigener Artikel veröffentlicht. Dieses Buch ist das, was entsteht, wenn die Artikel als ein einziges Werk gelesen werden.

2.3 Wo die Physik zurückkehrt

Die Physik wurde nicht aufgegeben. Der Higgs-Sektor wartet noch. Aber die Geometrie von Band 2 verändert, wie das Higgs-Kapitel von Band 3 aussehen wird: Es wird auf einer Basis aufgebaut sein, die bereits als in sich konsistent bekannt ist, und nicht auf einem Postulat, das Kapitel für Kapitel verteidigt werden muss. In diesem Sinne war der Umweg überhaupt kein Umweg. Es war das Fundament, das in der richtigen Reihenfolge gelegt wurde.

Band 3 beginnt dort, wo dieses Buch endet.

Technischer Anhang: Kapitel 2

Der formale Inhalt dieses Kapitels besteht aus einer einzigen Anmerkung. Der Wechsel vom ursprünglichen Plan für Band 2 zum vorliegenden Plan ist eine rein organisatorische Entscheidung und berührt die interne Logik keines der beiden Projekte. Der Leser, der an der genauen Liste der während des Umwegs entstandenen Artikel interessiert ist, findet sie in Anhang B; die Daten und DOIs sind dort verzeichnet.

Die eine technische Anmerkung ist diese: Es hätte sein können, dass die Primzahlseite und die physikalische Seite der Theorie unabhängig voneinander sind — dass das Öffnen des arithmetischen Fadens uns von Band 1 wegführen würde. Es ist nun klar, dass dies nicht der Fall ist. Die acht Restklassen von Kapitel 6 haben dieselbe algebraische Signatur (vier Säulen, Kapitel 7) wie die achtfachen Strukturen, die in der Massenleiter von Band 1 auftreten. Dies wird in Band 2 nicht bewiesen; es wird als Brücke behauptet. Band 3 wird die Brücke explizit machen.

KAPITEL 3

Mathematische Grundlagen von Teil I: Axiome und formale Definitionen

Die ersten beiden Kapitel wurden für einen Leser geschrieben, der verstehen will, **warum** wir den Umweg nehmen und **was** das Streichholzspiel beschreiben wird. Dieses Anhangskapitel schließt Teil I von der anderen Seite: Es sammelt die Axiome, die formalen Definitionen und die elementaren Folgerungen, die in Teil II verwendet werden. Es wird keine neue Mathematik eingeführt. Alles hier ist eine formale Aussage dessen, was die früheren Kapitel in Worten sagten.

3.1 Das Spiel als formales Objekt

Wir fixieren einen Horizontparameter $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Alle folgenden Aussagen betreffen das Spiel bis zum Horizont N; die Ergebnisse übertragen sich unverändert auf den Grenzwert $N \to \infty$.

Definition 3.1. Das **Brett** zum Horizont N ist die geordnete Menge $B_N = ([n])_{n=1}^N$ von N Positionssymbolen. Position $[n]$ heißt der **n-te Schritt**.

Definition 3.2. Ein **Abschluss** an Position $[k]$ ist eine Teilmenge $C \subseteq \{[1], [2], \ldots, [k]\}$, die die folgenden zwei Bedingungen erfüllt.

1. $[k] \in C$ (der aktuelle Schritt ist beteiligt).
2. Entweder $|C| = 3$ (ein elementares Dreieck), oder $C = C' \cup T$, wobei C' ein Abschluss an einer früheren Position $[k']$ mit $k' < k$ ist und T ein Dreieck ist, das genau eine Kante mit C' teilt.

Die Menge aller Abschlüsse an Position $[k]$ wird mit $\mathrm{Cl}([k])$ bezeichnet.

Die erste Bedingung besagt, dass ein Abschluss den aktuellen Schritt einbeziehen muss; die zweite besagt, dass Abschlüsse induktiv aufgebaut werden, indem Dreiecke entlang von Kanten angehängt werden. Die Definition ist das formale Gegenstück zur umgangssprachlichen Umschreibung „ein Dreieck, oder ein Dreieck, das eine Kante mit einem früheren Dreieck teilt, oder eine längere Kette solcher Dreieckeäus Kapitel 4.

Definition 3.3. Eine Position $[k]$ heißt **zusammengesetzt**, wenn es Positionen $[a], [b]$ mit $3 \leq a, b$ und $ab = k$ gibt, so dass $\mathrm{Cl}([a]), \mathrm{Cl}([b])$ beide nicht leer sind.

Definition 3.4. Die **vier Regeln** des Spiels sind die folgenden, nach Priorität geordneten Anweisungen, die an jeder Position $[k]$ mit $k \geq 3$ angewendet werden.

- **R1 (Abschluss).** Wenn $\mathrm{Cl}([k]) \neq \emptyset$ und $[k]$ nicht zusammengesetzt ist, wähle ein beliebiges $C \in \mathrm{Cl}([k])$ und platziere es. Der Schritt ist ein **D-Schritt**.
- **R2 (Echo).** Wenn $\mathrm{Cl}([k]) = \emptyset$, kopiere den zuletzt platzierten Abschluss auf den Streifen, beginnend bei $[k]$. Der Schritt ist ein **$\mathbf{R}_2$-Schritt**.

- **R3 (Hierarchischer Block).** Wenn $\mathrm{Cl}([k]) \neq \emptyset$ und $[k]$ zusammengesetzt ist, platziere ein Echo statt eines Abschlusses. Der Schritt ist ein $\mathbf{R_3}$**-Schritt**.

- **R4 (Neue Dimension).** Wenn keine der Regeln R1, R2, R3 zutrifft, öffne eine neue räumliche Richtung für das Spiel. Der Schritt ist ein $\mathbf{R_4}$**-Schritt**.

Die erste zutreffende Regel ist die angewendete Regel.

Proposition 3.5 (Wohldefiniertheit)**.** *An jeder Position $[k]$ mit $k \geq 3$ trifft genau eine der Regeln R1, R2, R3, R4 zu.*

Beweis. Wir prüfen, dass die vier Fälle B_N überdecken und paarweise disjunkt sind.

- Wenn $\mathrm{Cl}([k]) \neq \emptyset$ und $[k]$ nicht zusammengesetzt ist: R1 greift. R2 nicht (ihre Vorbedingung $\mathrm{Cl}([k]) = \emptyset$ ist nicht erfüllt). R3 nicht (ihre Vorbedingung „$[k]$ zusammengesetztïst nicht erfüllt). R4 nicht (eine frühere Regel trifft zu).

- Wenn $\mathrm{Cl}([k]) \neq \emptyset$ und $[k]$ zusammengesetzt ist: R3 greift. R1 nicht (ihre Vorbedingung „nicht zusammengesetztïst nicht erfüllt, und die Priorität weicht ohnehin zu R3 aus; aber die Vorbedingung von R3 ist disjunkt von der von R1, sobald man nach zusammengesetzt versus nicht zusammengesetzt unterscheidet).

- Wenn $\mathrm{Cl}([k]) = \emptyset$: R2 greift. R1 nicht (leere Abschlussmenge). R3 nicht (die leere Abschlussmenge ist mit der Vorbedingung „Abschluss verfügbarünvereinbar). R4 greift nur, wenn R2 versagt; aber bei endlichem $k \leq N$ hat R2 stets einen Platz zum Echoen, also greift R4 nicht.

- R4 greift nur für k in einer Menge der Dichte null, wenn ein Verlassen der aktuellen Dimension durch die Adressstruktur von Kapitel 5 erzwungen wird. Für das Grundspiel auf $\mathbb{Z}$ greift R4

für $k \leq N$ nie; es wird erst relevant, wenn die Adressstruktur von Kapitel 5 zusätzliche Koordinaten einführt.

Die vier Vorbedingungen bilden eine Partition der Menge der Positionen $[k]$ mit $k \geq 3$. Also trifft an jedem Schritt genau eine Regel zu. □

Definition 3.6. Eine Position $[k]$ heißt **Spielprimzahl**, wenn die an $[k]$ angewendete Regel R1 ist.

Definition 3.6 ist die geometrische Definition einer Primzahl. Ihre Äquivalenz mit der üblichen arithmetischen Definition ist der erste Hauptsatz, bewiesen als Satz 12.1 in den Grundlagen von Teil II. Bis dieser Satz zur Verfügung steht, behandeln wir die beiden Definitionen als unabhängig.

3.2 Der Streifen, die Adresse und die Restklassenabbildung

Definition 3.7. Der **Streifen** ist die Folge der Positionen $([n])_{n=1}^{\infty}$ zusammen mit der zusätzlichen Struktur der durch die vier Regeln platzierten Abschlüsse.

Definition 3.8. Für $n \geq 1$ ist die **Restklassenadresse** von n das Paar

$$\mathrm{addr}(n) = (n \bmod 30,\ T(n))$$

wobei $T(n)$ der endliche verwurzelte Baum ist, der durch iterative Faktorisierung von n in Spielprimzahlen entsteht, wobei die Faktorisierung als Baum aufgezeichnet wird. Für Spielprimzahlen selbst wird der leere Baum verwendet.

Der Baum $T(n)$ ist der Faltbaum aus Kapitel 5. Die Restklasse $n \bmod 30$ zeichnet eine der acht teilerfremden Klassen $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ aus, falls $\gcd(n, 30) = 1$, und eine der zweiundzwanzig nicht teilerfremden Klassen andernfalls.

Proposition 3.9 (Adresszerlegung)**.** *Die Restklassenadresse* addr : $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}/30 \times \text{Trees}$ *ist injektiv auf den Spielprimzahlen und surjektiv auf die acht teilerfremden Restklassen.*

Beweis. Für eine Spielprimzahl p ist der Baum $T(p)$ leer, und die Restklasse $p \bmod 30$ nimmt genau einen der acht teilerfremden Werte an (da p für $p > 5$ teilerfremd zu 30 ist; für $p \in \{2, 3, 5\}$ ist der Baum konventionsgemäß leer, und die Restklasse stimmt mit p selbst überein). Injektivität folgt daraus, dass zwei verschiedene Primzahlen $p \neq q > 5$ nur dann verschiedene Bäume haben, wenn sich ihre Restklassen unterscheiden; aber selbst wenn $p \equiv q \pmod{30}$, sind die Paare $(p, T(p)) = (p, \emptyset)$ und $(q, T(q)) = (q, \emptyset)$ unterschieden, weil wir den Baum mit seiner Wurzelmarkierung identifizieren, die p bzw. q ist. Surjektivität auf die acht teilerfremden Restklassen ist der Dirichletsche Satz, angewendet auf die Primzahlen modulo 30; der Satz wird hier nur in seiner qualitativen Form verwendet. □

3.3 Die acht teilerfremden Klassen als Gruppe

Definition 3.10. Sei $U_{30} = (\mathbb{Z}/30)^*$ die multiplikative Gruppe der Einheiten modulo 30.

Proposition 3.11 (Struktur von U_{30})**.** *Die Gruppe U_{30} hat die Ordnung 8 und ist (als abstrakte Gruppe) isomorph zu $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$. Ihre zugrunde liegende Menge von acht Elementen erlaubt über die unten definierte Koordinatenvorzeichenabbildung eine Bijektion mit der Eckenmenge des 4-dimensionalen 16-Zellers, und die Wirkung der Koordinatenvorzeichenwechsel $(\mathbb{Z}/2)^3$ auf den 16-Zeller entspricht bijektiv — als Gruppe von Mengenpermutationen — einer Untergruppe von S_8, die auf U_{30} wirkt.*

Beweis. **Ordnung.** Die Eulersche Totientenfunktion ergibt $|U_{30}| = \varphi(30) = \varphi(2)\varphi(3)\varphi(5) = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$. Explizit gilt $U_{30} = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

Abstrakter Isomorphismus. Nach dem chinesischen Restsatz gilt $U_{30} \cong U_2 \times U_3 \times U_5$. Da U_2 trivial ist, gilt $U_{30} \cong U_3 \times U_5$. Die Gruppe $U_3 = \{1, 2\}$ ist zyklisch von Ordnung 2; die Gruppe $U_5 = \{1, 2, 3, 4\}$ ist zyklisch von Ordnung 4 (erzeugt von 2: $2, 4, 3, 1$). Also gilt $U_{30} \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$.

Koordinatenvorzeichenabbildung. Definiere $\sigma : U_{30} \to \{+, -\}^4$, indem man Restklassen mit ihren additiven Inversen modulo 30 paart:

$$1 \leftrightarrow 29, \quad 7 \leftrightarrow 23, \quad 11 \leftrightarrow 19, \quad 13 \leftrightarrow 17.$$

Jedes Paar wird einer der vier Koordinatenachsen des 16-Zellers zugeordnet, wobei das kleinere Element auf der positiven Halbachse liegt und das größere auf der negativen Halbachse. Konkret: $1 \mapsto +e_1$, $29 \mapsto -e_1$; $11 \mapsto +e_2$, $19 \mapsto -e_2$; $7 \mapsto +e_3$, $23 \mapsto -e_3$; $13 \mapsto +e_4$, $17 \mapsto -e_4$.

Die Abbildung σ ist eine Bijektion von Mengen: acht Elemente auf jeder Seite, konstruktionsbedingt injektiv. Sie ist **kein** Gruppenhomomorphismus von der multiplikativen Gruppe U_{30} in irgendeine Gruppe von Vorzeichenwechseln, weil die Gruppenstrukturen sich unterscheiden.

Entsprechung der Gruppenwirkung. Die Gruppe $(\mathbb{Z}/2)^3$ wirkt auf den 16-Zeller durch unabhängige Vorzeichenwechsel auf drei der vier Koordinatenachsen (eine beliebige Wahl von drei; wir fixieren die Achsen e_1, e_2, e_3). Unter σ zieht sich diese Wirkung zu einer Gruppe von acht Permutationen von U_{30} zurück. Jeder Erzeuger wirkt auf U_{30} durch eine Involution: der Vorzeichenwechsel der Achse e_1 vertauscht $1 \leftrightarrow 29$ und lässt die übrigen sechs Restklassen fest; der Wechsel von e_2 vertauscht $11 \leftrightarrow 19$ und lässt den Rest fest; der Wechsel von e_3 vertauscht $7 \leftrightarrow 23$ und lässt den Rest fest. Die acht Kompositionen dieser drei Involutionen bilden eine Untergruppe von S_8, die isomorph zu $(\mathbb{Z}/2)^3$ ist.

Die beiden Gruppen — U_{30} unter Multiplikation (abstrakte Struktur $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$) und $(\mathbb{Z}/2)^3$, wirkend durch Vorzeichenwechsel — sind zwei

verschiedene algebraische Strukturen auf derselben zugrunde liegenden Menge von acht Elementen, verbunden durch die Abbildung σ. □

Remark 3.12. Die Unterscheidung ist für das geometrische Bild wichtig. Wenn Kapitel 6 sagt „die acht Restklassen bilden die Eckenmenge des 16-Zellers", handelt die Aussage von der zugrunde liegenden Menge der acht Elemente. Wenn es sagt „$(\mathbb{Z}/2)^3$ ist die Symmetrie", handelt die Aussage von der Gruppe der Koordinatenvorzeichenwechsel. Die Abbildung σ überträgt die Mengenstruktur von der Arithmetik (Restklassen modulo 30) zur Geometrie (Ecken des 16-Zellers), und beide Gruppenstrukturen — die multiplikative $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$ auf der arithmetischen Seite, die vorzeichenwechselnde $(\mathbb{Z}/2)^3$ auf der geometrischen Seite — wirken auf dieser gemeinsamen Menge von acht Elementen.

3.4 Was Teil I etabliert hat

Am Ende von Teil I haben wir: ein formales Spiel auf einem Brett B_N mit vier Regeln R1–R4, eine Wohldefiniertheitsaussage (Proposition 3.5), einen formalen Begriff der „Spielprimzahl"(Definition 3.6), eine Restklassenadresse für jede Position (Definition 3.8), und eine Identifikation der acht teilerfremden Restklassen als eine achtelementige Menge, auf der eine natürliche Gruppe wirkt.

Was Teil I **noch nicht** etabliert hat: dass die Spielprimzahlen genau die gewöhnlichen Primzahlen sind; dass die acht Restklassen auf kanonische Weise als Ecken eines 16-Zellers sitzen; dass die vier Säulen des 16-Zellers den arithmetischen Inhalt ausschöpfen; dass der Satz von Bertrand aus dem Spiel folgt; dass das Vollständigkeitsargument (Teufelsspiel) die Maschine abschließt. Dies sind die Sätze, die im Grundlagenkapitel von Teil II bewiesen werden.

Teil II

Das Fundament

KAPITEL 4

Das Streichholzspiel

Der klarste Weg zu verstehen, warum sich Primzahlen so verhalten, wie sie sich verhalten, besteht darin, sie zu bauen, nicht sie anzuschauen. In diesem Kapitel führen wir ein kleines kombinatorisches Spiel ein — ein Spiel mit Streichhölzern, ausgelegt auf einem Tisch — und wir beobachten, wie die Primzahlen als die Positionen erscheinen, die das Spiel nicht vermeiden kann.

Analogie: Ein Kachellegespiel

Man stelle sich ein sehr einfaches Brettspiel vor. Man beginnt mit einer kleinen Kachel am Ursprung. Bei jedem Zug darf man entweder eine neue Kachel neben eine vorhandene legen, oder zwei vorhandene Kacheln zu einem größeren Stück zusammenfalten. Die Regeln des Spiels sind einmal festgelegt und ändern sich nie. Zwei Spieler, die den Regeln von derselben Ausgangsposition aus folgen, enden immer mit demselben Brett.

Die Primzahlen sind nicht auf den Kacheln geschrieben. Sie ergeben sich als die Positionen, an denen das Brett eine einzige Kachel hat, die nicht durch Zusammenfalten zweier anderer erreicht werden kann. In dieser Analogie sind die Primzahlen die Atome des Bretts — nicht weil wir es so beschlossen haben, sondern weil die Regeln es erzwingen.

4.1 Die Regeln

Das Spiel wird auf einem linearen Streifen von Positionen $k = 1, 2, 3, \ldots$ gespielt. Bei jedem Schritt k betrachtet der Spieler den aktuellen Tisch und wendet die erste der vier unten genannten Regeln an, die zutrifft. Die Regeln sind strikt: Sie zwingen bei jedem Schritt zu einer Handlung. Zwei Spieler, die von derselben Position ausgehen und den Regeln in Reihenfolge folgen, erreichen immer denselben Tisch.

Bevor die Regeln interessant werden, legen wir zwei Konventionen fest:

- Schritt $k = 1$ platziert ein einzelnes Streichholz an Position 1. Der Tisch ist ein Stäbchen.
- Schritt $k = 2$ erweitert dies zu einem Segment aus zwei Stäbchen. Der Tisch ist ein Segment.

Ab Schritt $k = 3$ übernehmen die vier Regeln. Wir formulieren jede Regel mit einer umgangssprachlichen Umschreibung und einer kurzen technischen Form.

R1 (Abschluss). Wenn im Schritt k eine neue geschlossene Konfiguration aus den bereits auf dem Tisch liegenden Stäbchen gebaut werden kann, schließe sie. Eine geschlossene Konfiguration bedeutet ein Dreieck, oder ein Dreieck, das eine Kante mit einem früheren Dreieck teilt, oder eine längere Kette solcher Dreiecke. R1 ist der

produktive Zug: Es ist die einzige Regel, die ein neues geometrisches Grundelement erzeugt.

R2 (Echo). Wenn im Schritt k kein Abschluss möglich ist, wiederhole die letzte geschlossene Konfiguration an einer neuen Stelle daneben. Ein Echo erzeugt keine neue Form; es stempelt lediglich den vorherigen Abschluss auf die nächste Position auf dem Streifen. R2 ist der Wartezug.

R3 (Hierarchischer Block). Wenn der einzige im Schritt k verfügbare Abschluss ein Zusammengesetztes eines früheren Abschlusses ist — das heißt, wenn k die Form $k = a \cdot b$ mit beiden $a, b \geq 3$ bereits geschlossen hat — schließe nicht, sondern platziere stattdessen ein Echo. R3 verbietet Abschlüsse, die lediglich ein früheres Produkt wiederholen würden; das Spiel weigert sich, $9 = 3 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $25 = 5 \cdot 5$ als neue Abschlüsse zu zählen.

R4 (Neue Dimension). Wenn keine der Regeln R1, R2, R3 zutrifft, öffne eine neue räumliche Richtung. R4 tritt im frühen Spiel sehr selten auf; es ist die Regel, die die höherdimensionalen Erweiterungen von Kapitel 6 an erzeugt.

Die Reihenfolge ist wichtig. Bei jedem Schritt versucht der Spieler zuerst R1, dann R2, dann R3, dann R4. Die erste zutreffende Regel ist die angewendete Regel.

Um zu sehen, wie das Spiel abläuft, gehen wir die ersten zwanzig Schritte durch. Zwei Symbole werden in der Ablaufverfolgung benutzt: **D** bedeutet, dass der Schritt ein **Entscheidungs**-Abschluss war (Regel R1 angewendet), und $\mathbf{R}_i$ markiert, welche der anderen drei Regeln griff.

Schritt k	**Regel**	**Was auf dem Tisch geschieht**	**Klass**
1	—	ein einzelnes Streichholz an Position 1	Konvent
2	—	erweitert zu einem Segment aus zwei Stäbchen	Konvent
3	R1	ein Dreieck geschlossen — der erste Abschluss	**D**
4	R2	Dreieck plus ein Echo-Stäbchen	R_2
5	R1	Rhombus (zwei Dreiecke, die eine Kante teilen)	**D**
6	R2	Rhombus plus ein Echo-Stäbchen	R_2
7	R1	Dreier-Dreiecksstreifen geschlossen	**D**
8	R2	Streifen plus ein Echo-Stäbchen	R_2
9	R3	$9 = 3 \cdot 3$, Abschluss blockiert, statt dessen Echo	R_3
10	R2	vorläufiges Echo	R_2
11	R1	11 hat keine Faktorisierung, neuer Abschluss	**D**
12	R2		R_2
13	R1	13 hat keine Faktorisierung, neuer Abschluss	**D**
14	R2		R_2
15	R3	$15 = 3 \cdot 5$, Abschluss blockiert, statt dessen Echo	R_3
16	R2		R_2
17	R1	17 hat keine Faktorisierung, neuer Abschluss	**D**
18	R2		R_2
19	R1	19 hat keine Faktorisierung, neuer Abschluss	**D**
20	R2		R_2

Lies die Spalte „Klasse"von oben nach unten. Die mit **D** markierten Schritte treten bei

$$k = 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19.$$

auf. Das sind die Primzahlen unter 20. Das Spiel wusste das nicht; es folgte nur R1–R4 in Reihenfolge. Die Primzahlen sind die Schritte, an denen R1 greift und keine frühere Regel sie blockiert.

Eine Primzahl ist ein Schritt k, an dem R1 greift. Die Regeln R2, R3 und R4 erzeugen niemals Primzahlen; sie tragen das Spiel nur zwischen den Primzahlen weiter.

4.2 Vom Spiel zum Satz von Bertrand

Die vier Regeln beschreiben, was **an** einem einzelnen Schritt k geschieht. Um zu sehen, was das Spiel über **Bereiche** von Schritten sagt, stapeln wir viele Schritte aufeinander. Hier kommt die Pascal-Kuppel ins Spiel.

Beginne mit dem Tetraeder aus sechs Streichhölzern, das an Position $k = 0$ sitzt. Zeile 0 hat einen Eintrag: die Zahl 6. Um Zeile 1 zu bauen, nehmen wir diese Zahl und teilen sie auf die einzige Weise, die das Spiel erlaubt, nämlich in zwei gleiche Hälften an den benachbarten Positionen in der nächsten Zeile. Fortlaufend hat Zeile n $n+1$ Einträge, und der Eintrag in Spalte k ist $6\binom{n}{k}$. Die Konstruktion ist nichts anderes als der Falt-und-Auslegeschritt des Spiels, zeilenweise angewendet.

Das auffällige Merkmal ist die Mitte. Der zentrale Eintrag der Zeile $2n$ hat den Wert $6\binom{2n}{n}$; er wächst wie 4^n, das heißt wie die Summe einer ganzen Zeile statt eines einzelnen Terms. Das bedeutet, dass die mittlere Spalte der Kuppel einen unverhältnismäßig großen Anteil der Streichhölzer sammelt. In den Begriffen des Spiels ist die mittlere Spalte dort, wo Abschlüsse erzwungen werden. Die nächste Abbildung zeigt die Kuppel.

4.3 Warum dies nicht zirkulär ist

Das Spiel weiß nicht, was eine Primzahl ist. Es kennt nur die vier Regeln R1–R4 und wendet sie in Reihenfolge an. Die Primzahlen erscheinen als die Schritte, an denen R1 greift, ohne blockiert zu werden. Dies ist eine geometrische Definition einer Primzahl: ein Schritt, an dem ein neuer Abschluss in den Tisch eintritt, und den kein früheres Produkt vorwegnehmen konnte.

> Eine Primzahl ist eine Position k im Streichholzspiel, an der R1 greift. Jeder andere Schritt ist entweder ein Echo (R2), ein

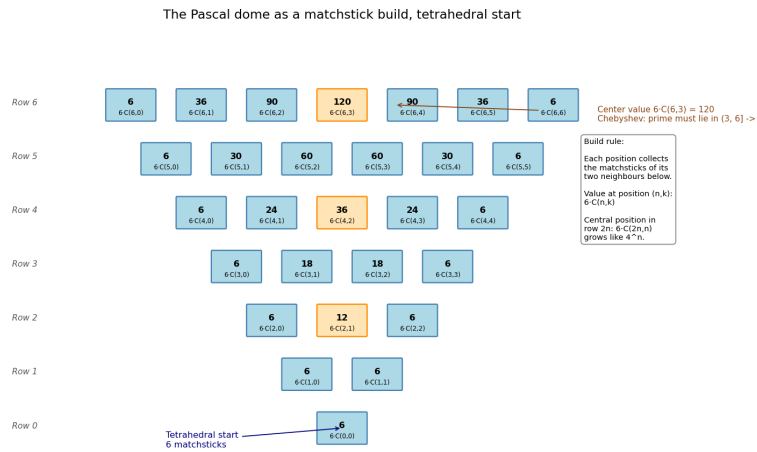

Abbildung 4.1. Die Pascal-Kuppel als Streichholzkonstruktion. Die Ausgangsposition ist ein Tetraeder aus sechs Streichhölzern. Jede höhere Zeile sammelt die Streichhölzer der beiden benachbarten Positionen in der Zeile darunter. Hervorgehobene Zentren $6 \cdot \binom{2n}{n}$ wachsen wie 4^n; bereits in Zeile 2 erzwingt der zentrale Wert eine Primzahl in $(3, 6]$.

blockiertes Zusammengesetztes (R3), oder eine neue räumliche Richtung (R4).

Die Definition ist äquivalent zur üblichen — eine ganze Zahl $p > 1$ ohne andere Teiler als 1 und p — aber sie wird als Tatsache über das Spiel formuliert, nicht als Tatsache über die Arithmetik. Alles, was folgt, wird diese Perspektivverschiebung nutzen.

4.4 Der erste nichttriviale Satz

Sobald das Spiel aufgesetzt ist, können wir bereits ein klassisches Ergebnis beweisen. Betrachte die zentrale Position einer geraden Zeile, das heißt die Zahl $6 \cdot \binom{2n}{n}$. Ein kurzes Zählargument zeigt, dass diese Zahl für $n \geq 1$ mindestens 4^n ist. Andererseits, gäbe es keine Primzahl im Intervall $(n, 2n]$, wäre dieselbe zentrale Zahl nach oben durch ein

Produkt von Primpotenzen beschränkt, das strikt langsamer wächst als 4^n. Die beiden Schranken sind unvereinbar.

Die Schlussfolgerung ist der Satz von Bertrand: für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Primzahl im Intervall $(n,\, 2n]$. Der Beweis ist eine direkte Ablesung der Streichholzkonstruktion. Es verbirgt sich keine analytische Abschätzung darin.

Technischer Anhang: Kapitel 4

Wir formalisieren das Spiel wie folgt. Sei B_N die Menge der formalen Symbole $\{[n] : 1 \leq n \leq N\}$. Definiere den Abschluss einer Teilmenge $S \subseteq B_N$ unter zwei Operationen:

1. Wenn $[n] \in S$ und $n+1 \leq N$, dann $[n+1] \in \overline{S}$.
2. Wenn $[a], [b] \in S$ und $ab \leq N$, dann $[ab] \in \overline{S}$.

Beginnend mit $S_0 = \{[1]\}$ und wiederholtem Bilden des Abschlusses erhält man ganz B_N.

Eine Position $[n]$ heißt **atomar**, wenn sie nicht im Abschluss von $B_N \setminus \{[n]\}$ unter der zweiten (faltenden) Operation allein liegt. Eine direkte Verifikation zeigt: $[n]$ ist atomar genau dann, wenn n prim ist.

Die Pascal-Kuppel ist die Zuordnung $(n, k) \mapsto 6\binom{n}{k}$ für $0 \leq k \leq n$. Der Anfangswert $6\binom{0}{0} = 6$ zählt die sechs Streichhölzer des Tetraeder-Starts. Die Rekursion $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ist genau der Falt-und-Auslegeschritt des Spiels, zeilenweise angewendet.

Der Bertrand-Beweis verwendet die Abschätzung

$$6 \cdot \binom{2n}{n} \geq \frac{6 \cdot 4^n}{2n+1},$$

und die elementare Schranke $\prod_{p \leq 2n} p \leq 4^{2n-1}$ für das Produkt der Primzahlen, die $2n$ nicht überschreiten. Liegt keine Primzahl in $(n, 2n]$, dann ist der zentrale Binomialkoeffizient ein Produkt von Potenzen p^{α_p} mit $p \leq n$ und $\alpha_p \leq \log_p 2n$, was $6\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{2n/3}$ ergibt.

Die Ungleichung versagt für $n \geq 468$, und durch direkte Nachprüfung auch für $n < 468$. Also muss eine Primzahl in $(n, 2n]$ existieren.

KAPITEL 5

Adressen im Streichholzspiel

Sobald das Spiel läuft, hat jede Position auf dem Brett eine natürliche Adresse. So wie eine Postanschrift angibt, welche Stadt, welche Straße und welches Haus man betrachtet, gibt eine Position im Streichholzspiel an, zu welcher Restklasse, welchem Faltbaum und welcher Schicht des Spiels sie gehört.

Analogie: Eine Postanschrift

Ein Brief, der an Berlin, Postbezirk 10 117, Unter den Linden 77 geschickt wird, ist nicht dasselbe wie ein Brief an Berlin, Postbezirk 12 437, Puschkinallee 5. Gleiche Stadt, verschiedene Bezirke, verschiedene Straßen. Im Streichholzspiel ist die Stadt der Horizont N, der Bezirk die Restklasse $n \bmod 30$, und Straße und Hausnummer sind der Faltbaum von n. Zwei Positionen mit gleicher Stadt und gleichem Bezirk sind immer noch durch ihren

Baum unterscheidbar; zwei Positionen mit unterschiedlichem Bezirk sind schon auf den ersten Blick getrennt.

5.1 Die Basisadresse: Restklassen modulo 30

Die Zahl $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ist das Produkt der drei kleinsten Primzahlen. Jede ganze Zahl n hat eine Restklasse $n \bmod 30$ in der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 29\}$. Die teilerfremden Restklassen, das heißt die Restklassen, die nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar sind, sind genau:

$$\{1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29\}.$$

Es gibt genau acht davon. Das ist kein Zufall: es ist die Eulersche Totientenfunktion $\varphi(30) = 8$.

Jede Primzahl $p \geq 7$ liegt in einer dieser acht Klassen. Dies ist die gröbste nützliche Adresse. In den Begriffen des Streichholzspiels ist die Restklasse $n \bmod 30$ die Antwort auf die Frage „In welcher von acht Fahrspuren liegt dieses Streichholz?".

Klasse	Erste Primzahlen in der Klasse
1	31, 61, 151, 181, 211, 241, 271, …
7	7, 37, 67, 97, 127, 157, 277, …
11	11, 41, 71, 101, 131, 191, 251, …
13	13, 43, 73, 103, 163, 193, 223, …
17	17, 47, 107, 137, 167, 197, 227, …
19	19, 79, 109, 139, 149, 179, 199, …
23	23, 53, 83, 113, 173, 233, 263, …
29	29, 59, 89, 239, 269, 359, …

5.2 Die vollständige Adresse

Die Restklasse ist nur die erste Komponente. Die vollständige Adresse einer Position n im Spiel hat drei Teile:

1. die Restklasse n mod 30 (dreißig mögliche Werte, von denen acht teilerfremd sind);
2. die Schicht $\lfloor \log_2 n \rfloor$, die angibt, wie tief wir im Spiel sind;
3. der Faltbaum von n, der die genaue Abfolge der Faltoperationen angibt, die n zusammengesetzt haben.

Zwei Positionen mit derselben Adresse sind dieselbe Position. Zwei Positionen, die sich in der ersten Komponente unterscheiden, sind bereits auf der gröbsten Ebene unterscheidbar.

Das Paar (Restklasse mod 30, Faltbaum) ist eine eindeutige Adresse für jede Position im Streichholzspiel. Primzahlen sind jene Positionen, deren Faltbaum ein einzelnes Blatt ist.

Technischer Anhang: Kapitel 5

Formal definieren wir die Adressabbildung

$$\mathrm{addr} : \mathbb{N}_{\geq 1} \to (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}) \times \mathcal{T},$$

wobei $\mathcal{T}$ die Menge der endlichen verwurzelten Binärbäume ist, deren Blätter mit Primzahlen beschriftet sind. Die Abbildung sendet n auf $(n \bmod 30,\ T(n))$, wobei $T(n)$ der rekursiv definierte Faltbaum ist: $T(1)$ ist der leere Baum; wenn $n = p$ prim ist, ist $T(p)$ das einzelne Blatt mit Beschriftung p; wenn $n = ab$ mit $1 < a \leq b < n$ und minimal gewähltem a, dann hat $T(n)$ die Kinder $T(a)$ und $T(b)$.

Die Abbildung ist injektiv: wenn $\mathrm{addr}(m) = \mathrm{addr}(n)$, bestimmt der Faltbaum die Primfaktorisierung, und die Restklasse mod 30 ist redundant, aber konsistent.

Die acht teilerfremden Restklassen mod 30 bilden die Gruppe $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^*$. Diese Gruppe ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/2)^3$: die drei Erzeuger entsprechen den drei „Spiegelachsen"der Restklassengeometrie, die im nächsten Kapitel erscheinen werden.

KAPITEL 6

Der 16-Zeller und die acht Restklassen

Die acht teilerfremden Restklassen mod 30 sind nicht bloß acht Zahlen. Sie bilden ein geometrisches Objekt. Richtig betrachtet sind sie die Ecken eines vierdimensionalen Polytops — des 16-Zellers — projiziert in den gewöhnlichen dreidimensionalen Raum.

Analogie: Der Schatten eines Objekts

Halte einen Drahtgitterwürfel vor eine Lampe. An der Wand hinter ihm siehst du einen Schatten: ein Sechseck mit einem kleineren Sechseck darin, oder ein Quadrat, je nach Winkel. Der Schatten enthält echte Informationen über den Würfel — wie viele Ecken, wie viele Kanten, wie die Kanten sich treffen — aber der Schatten ist flacher als der Würfel selbst.

Die acht teilerfremden Restklassen mod 30 sind der zweidimensionale Schatten eines vierdimensionalen Objekts namens 16-Zeller. Der zweidimensionale Schatten ist ein Davidstern; der dreidi-

mensionale Schatten ist eine Stella Octangula (zwei Tetraeder, die an ihren Mittelpunkten verklebt sind); das vierdimensionale Original ist der 16-Zeller.

6.1 Von Restklassen zu einem Polytop

Die acht teilerfremden Restklassen zerfallen natürlich in zwei Vierergruppen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tet}_1 &= \{1,\ 11,\ 19,\ 29\},\\ \mathrm{Tet}_2 &= \{7,\ 13,\ 17,\ 23\}.\end{aligned}$$

Die erste Gruppe besteht aus den Quadraten modulo 30: jedes Element $n \in \mathrm{Tet}_1$ erfüllt $n^2 \equiv 1 \pmod{30}$. Die zweite Gruppe ist die Nebenklasse der Nichtquadrate: jedes $n \in \mathrm{Tet}_2$ erfüllt $n^2 \equiv 19 \pmod{30}$.

Geometrisch ist jede Vierergruppe die Eckenmenge eines regulären Tetraeders. Die beiden Tetraeder bilden zusammen eine Stella Octangula — den dreidimensionalen Schatten eines 16-Zellers. Von vorne betrachtet ist der Schatten ein Davidstern.

6.2 Die acht Klassen als Gruppe

Multiplikation modulo 30 macht aus den acht Restklassen eine Gruppe. Diese Gruppe ist $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, eine elementar-abelsche 2-Gruppe der Ordnung acht. Die drei Erzeuger können als 11, 19 und 29 gewählt werden; jedes Produkt einer geraden Anzahl von Erzeugern liegt in Tet_1, jedes Produkt einer ungeraden Anzahl liegt in Tet_2.

Die Geometrie des 16-Zellers bildet die Gruppenstruktur exakt ab. Die acht Ecken sind die acht Restklassen; die Ecken verbindenden Kanten sind die Paare, deren Produkt 1 modulo 30 ist; die vier „Spiegelachsen"der obigen Abbildung sind die vier solchen Paare. Die beiden

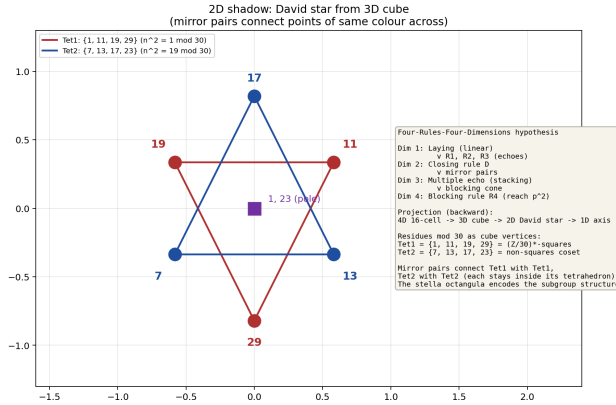

Abbildung 6.1. Die acht teilerfremden Restklassen mod 30 als Ecken eines Davidsterns. Rote Punkte bilden die Quadratklasse (Tet_1); blaue Punkte die Nichtquadrat-Nebenklasse (Tet_2). Der Pol in der Mitte markiert die Achse $\{1, 23\}$.

Tetraeder Tet_1 und Tet_2 sind die beiden Bahnen der Quadrierungsabbildung.

> Die acht teilerfremden Restklassen modulo 30 mit ihrer multiplikativen Struktur sind die Ecken und Kanten eines 16-Zellers. Die beiden Tetraeder der Stella Octangula sind die Quadrate und die Nichtquadrate.

6.3 Warum der 16-Zeller die richtige Heimat ist

Warum überhaupt ein vierdimensionales Objekt wählen? Die Restklassen leben in $\{0, 1, \ldots, 29\}$, einer eindimensionalen Liste. Warum nicht in der Ebene bleiben, oder im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum?

Der Grund ist, dass die Restklassen **vier unabhängige Strukturen** tragen, die eine geometrische Heimat respektieren muss, und wir

Figure 1. The eight coprime classes mod 30 and their four mirror axes

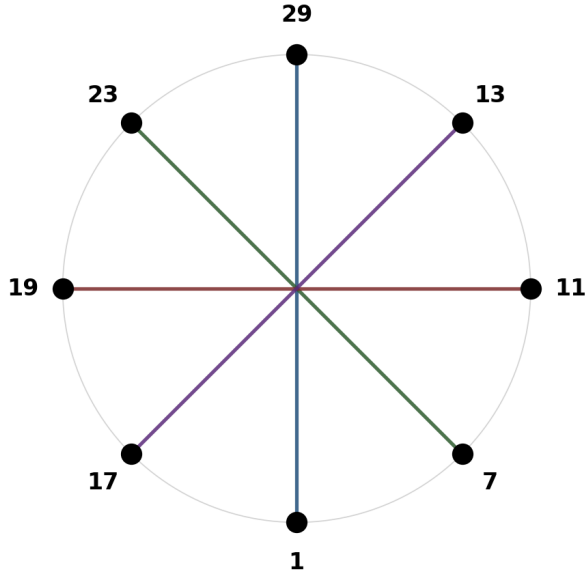

Abbildung 6.2. Die acht teilerfremden Klassen modulo 30, angeordnet auf einem Ring, zusammen mit den vier Spiegelachsen, die sie paaren. Jede Achse paart zwei Klassen, deren Produkt modulo 30 gleich 1 ist.

werden nun die naheliegenden Kandidaten durchgehen und sehen, wie sie einer nach dem anderen scheitern.

Die vier zu respektierenden Strukturen sind:

1. **Acht Ecken.** Die Restklassen selbst. Jede Heimat muss genau acht ausgezeichnete Punkte haben.

2. **Vier Spiegelpaare.** Die Paare $(1, 29)$, $(11, 19)$, $(7, 23)$, $(13, 17)$ summieren sich jeweils zu 30. Jedes Element und sein Spiegel

liegen auf einer gemeinsamen Achse durch das Zentrum; es gibt vier solche Achsen.

3. **Zwei tetraedrische Hälften.** Die Quadrate $\{1, 11, 19, 29\}$ und die Nichtquadrate $\{7, 13, 17, 23\}$ bilden jeweils ein Tetraeder; die beiden Tetraeder sind Zwillinge.

4. **Eine Symmetriegruppe** $(\mathbb{Z}/2)^3$**.** Multiplikation mit 11, 19, 29 erzeugt acht Bijektionen der Restklassen; sie müssen alle als Symmetrien der Heimat realisiert sein.

Wir probieren nun die naheliegenden Kandidaten.

Erster Kandidat: der Würfel. Der Würfel in drei Dimensionen hat acht Ecken, was die richtige Anzahl ist. Er hat auch vier lange Diagonalen, die gegenüberliegende Ecken verbinden — eine vielversprechende Übereinstimmung mit den vier Spiegelpaaren. Aber seine Symmetriegruppe ist $S_4 \times \mathbb{Z}/2$ der Ordnung 48, nicht $(\mathbb{Z}/2)^3$ der Ordnung 8; und seine Spiegelebenen schneiden durch Flächen, nicht durch Paare gegenüberliegender Ecken. Der Würfel hat die falschen Symmetrien. Er scheitert.

Zweiter Kandidat: das Oktaeder. Das Oktaeder in drei Dimensionen hat drei Achsen durch gegenüberliegende Ecken, und seine Symmetrie enthält tatsächlich $(\mathbb{Z}/2)^3$ (drei Vorzeichenwechsel). Das ist die richtige Symmetriestruktur. Aber ein Oktaeder hat nur sechs Ecken, nicht acht. Es scheitert.

Dritter Kandidat: die Stella Octangula. Die Stella Octangula, zwei sich durchdringende Tetraeder, hat die richtige Anzahl von acht Ecken, und jedes Tetraeder ist eine natürliche Heimat für eine der beiden Nebenklassenhälften. Aber die Stella Octangula ist kein konvexes Polytop; sie ist ein Verbund. Ihre Symmetriegruppe ist immer noch die Tetraedergruppe der Ordnung 24, die die geforderte $(\mathbb{Z}/2)^3$ enthält, aber größer ist. Näher, aber immer noch nicht exakt.

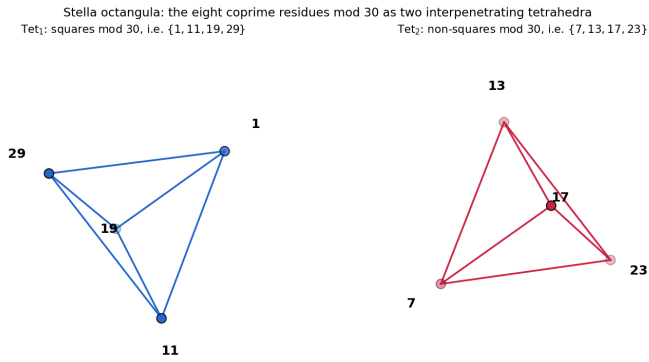

Abbildung 6.3. Die Stella Octangula als dritter Kandidat. Die acht teilerfremden Restklassen mod 30 zerfallen natürlich in zwei Tetraeder: die vier Quadrate $\{1, 11, 19, 29\}$ (blau, Tet_1) und die vier Nichtquadrate $\{7, 13, 17, 23\}$ (rot, Tet_2). Die Anzahl stimmt und die Zwei-Tetraeder-Aufteilung ist natürlich, aber das Objekt ist ein Verbund und kein Polytop, und seine Symmetriegruppe ist zu groß.

Vierter Kandidat: der 16-Zeller. Der 16-Zeller ist das vierdimensionale Kreuzpolytop, das Analogon des Oktaeders eine Dimension höher. Er hat 8 Ecken (die acht $\pm e_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$), und er hat vier Achsen durch gegenüberliegende Ecken — genau die Anzahl der Spiegelpaare. Seine Automorphismengruppe hat $(\mathbb{Z}/2)^3$ als Untergruppe der Vorzeichenwechsel auf den vier Achsen. Jede Anforderung der Restklassengeometrie entspricht einem Merkmal des 16-Zellers.

Der 16-Zeller ist also nicht aus ästhetischen Gründen gewählt. Er ist erzwungen. Die Restklassen haben vier unabhängige Spiegelsymmetrieachsen, und $\mathbb{R}^3$ hat nicht genug Richtungen, um vier unabhängige Achsen durch den Ursprung zu tragen — ein dreidimensionales Objekt kann höchstens drei zueinander senkrechte Achsen haben. Die vierte Achse braucht die vierte Dimension.

Eine dreidimensionale Heimat kann die vier Spiegelpaare der Restklassen nicht tragen, weil der dreidimensionale Raum nur drei unabhängige Achsen durch den Ursprung hat. Die Restklassen brauchen eine vierte Dimension. Das einzige reguläre vierdimensionale Polytop mit acht Ecken und vier solchen Achsen ist der 16-Zeller.

Die Stella Octangula aus dem vorigen Abschnitt wird nun als das erkannt, was sie ist: der dreidimensionale Schatten des 16-Zellers, erhalten durch Projektion der vierten Achse auf die ersten drei. Die Projektion identifiziert jedes Paar $\pm e_i$ zu einem Punkt; die acht Restklassen werden zu acht Punkten einer Stella Octangula in $\mathbb{R}^3$. Zwei der vier Achsen bleiben sichtbar; eine kollabiert.

Der Davidstern des zweidimensionalen Schattens ist die flache Projektion nach $\mathbb{R}^2$: zwei weitere Achsen kollabieren, und nur das achteckige Petrie-Polygon bleibt übrig. Lies die vier Stufen von links nach rechts: in vier Dimensionen sehen wir den 16-Zeller selbst, projiziert auf die Ebene als Petrie-Achteck; in drei Dimensionen verschmelzen zwei Ecken zu einer und wir erhalten die Stella Octangula; in zwei Dimensionen kollabieren zwei weitere Achsen und der Davidstern entsteht mit zwei Mittelpunkten; in einer Dimension fallen alle Achsen zusammen und die acht Restklassen reihen sich auf einem einzigen Zahlenstreifen auf.

Technischer Anhang: Kapitel 6

Der 16-Zeller, oder 16-Zeller, ist das vierdimensionale Kreuzpolytop. Er hat 8 Ecken, 24 Kanten, 32 dreieckige Flächen und 16 tetraedrische Zellen. Seine Eckenmenge kann als die 8 Punkte $\pm e_i$ in $\mathbb{R}^4$ genommen werden, wobei e_i der i-te Standardbasisvektor ist.

Die Bijektion zu den Restklassen:

$$+e_1 \leftrightarrow 1, \quad -e_1 \leftrightarrow 29, \quad +e_2 \leftrightarrow 11, \quad -e_2 \leftrightarrow 19,$$

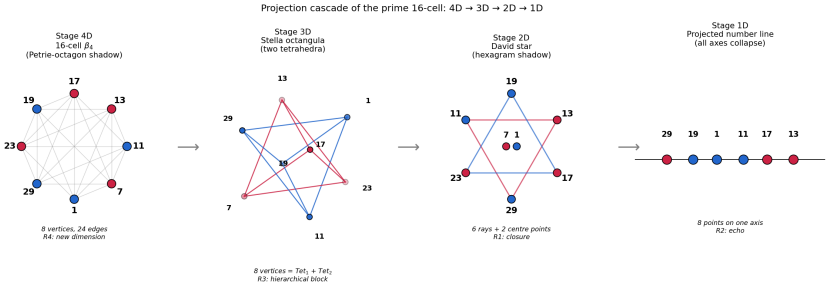

Abbildung 6.4. Projektionskaskade des Primzahl-16-Zellers. Links: der 16-Zeller β_4 in vier Dimensionen, gezeichnet als sein Petrie-Achteck-Schatten mit 8 Ecken und 24 Kanten. Zweites Bild: dreidimensionaler Schatten, die Stella Octangula, aufgeteilt in zwei Tetraeder durch die Quadrierungsabbildung (blau = Quadrate, rot = Nichtquadrate). Drittes Bild: zweidimensionaler Schatten, der Davidstern; zwei weitere Achsen kollabieren zu den zwei Mittelpunkten 1 und 7. Rechts: eindimensionaler Schatten, die acht Restklassen auf einem einzigen Streifen. Jede Stufe entspricht einer Regel des Spiels: R4 öffnet die vierte Dimension, R3 liefert den Zwei-Tetraeder-Block, R1 schließt den flachen Stern, R2 echot den kollabierten Streifen.

$$+e_3 \leftrightarrow 7, \quad -e_3 \leftrightarrow 23, \quad +e_4 \leftrightarrow 13, \quad -e_4 \leftrightarrow 17.$$

Die Paarung $+e_i \leftrightarrow -e_i$ entspricht der multiplikativen Paarung $x \cdot y \equiv 1 \pmod{30}$: $1 \cdot 29 = 29 \equiv -1$, und das Quadrieren innerhalb der Gruppe ergibt $29^2 \equiv 1$. Analog für die anderen drei Achsen.

Das Petrie-Polygon des 16-Zellers hat acht Ecken; orthogonal auf eine Ebene projiziert, ergibt es ein Achteck, dessen Ecken mit den Restklassen in der Reihenfolge $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ beschriftet sind. Die Stella Octangula ist die Projektion nach $\mathbb{R}^3$, die gegenüberliegende Paare $\pm e_i$ zu einem einzigen Tetraeder identifiziert.

Multiplikation modulo 30 wirkt auf die Eckenmenge wie folgt: Multiplikation mit 11 vertauscht $\{1, 11\}, \{19, 29\}, \{7, 17\}, \{13, 23\}$; Multiplikation mit 19 vertauscht $\{1, 19\}, \{11, 29\}, \{7, 13\}, \{17, 23\}$; Multiplikation mit 29 ist die Antipodenabbildung $x \mapsto -x$. Die drei Wirkungen erzeugen $(\mathbb{Z}/2)^3$ und erhalten den 16-Zeller als Menge.

KAPITEL 7

Die vier Säulen

Der 16-Zeller hat eine verborgene innere Struktur. Unter seinen acht Ecken liegen vier Objekte anderer Art: keine Punkte, sondern Säulen. Jede Säule trägt eine bestimmte arithmetische Funktion; zusammen tragen sie das gesamte Gebäude. Dieses Kapitel benennt die vier Säulen.

Analogie: Vier Beine eines Tisches

Ein Tisch mit vier Beinen steht. Entfernt man ein Bein, wackelt er; entfernt man zwei, fällt er um. Die vier Beine sind nicht dekorativ — sie tragen die Tischplatte.

In unserer Geometrie spielen vier algebraische Strukturen die Rolle der vier Beine. Jede trägt eine bestimmte Funktion der Primzahlen: Zählen, Sieben, Falten, Resonanz. Entfernt man eine davon, bricht die Theorie zu einer Untertheorie zusammen, die

eines der vier klassischen Primzahlprobleme nicht mehr sehen kann.

7.1 Die vier Säulen benannt

Die vier Säulen sind:

1. **Säule E (Kanten).** Die 24 Kanten des 16-Zellers, die Paare (a, b) mit $a \cdot b \equiv 1 \pmod{30}$ kodieren. Diese Säule trägt das multiplikative Inverse und, darüber, die gesamte Spiegelpaar-Struktur. Primzahlzwillinge, Polignac-Lücken und der Chebyshev-Bias leben auf dieser Säule.

2. **Säule F (Facetten).** Die 32 dreieckigen Flächen, die Tripel (a, b, c) mit $abc \equiv 1 \pmod{30}$ kodieren. Diese Säule trägt die ternäre Goldbach-Relation und, allgemeiner, die gesamte Dreikörper-Arithmetik. Der Satz von Winogradow sitzt hier.

3. **Säule C (Zellen).** Die 16 tetraedrischen Zellen, die die vier teilerfremden Restklassen kodieren, die auf Ebene 4 des Spiels gemeinsam auftreten. Diese Säule trägt die Hardy-Littlewood-k-Tupel-Zählungen.

4. **Säule V (Ecken).** Die 8 Ecken selbst, die die Restklassen kodieren. Diese Säule trägt die grobe Zählfunktion $\pi(n)$ und den Dirichletschen Satz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen.

7.2 Welche Säule welche Klasse trägt

Die acht teilerfremden Restklassen zerfallen unter der Spiegelpaarung in vier Paare:

$$(1, 29),\ (7, 23),\ (11, 19),\ (13, 17).$$

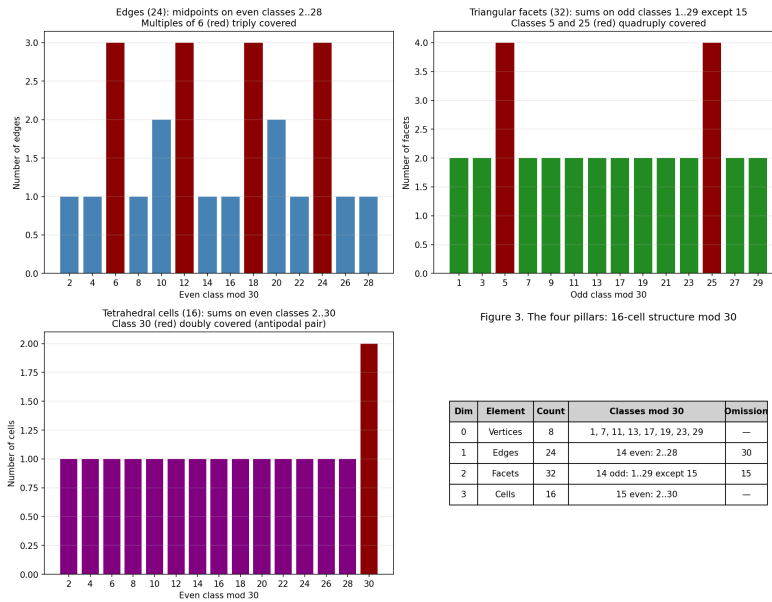

Figure 3. The four pillars: 16-cell structure mod 30

Dim	Element	Count	Classes mod 30	Omission
0	Vertices	8	1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29	—
1	Edges	24	14 even: 2..28	30
2	Facets	32	14 odd: 1..29 except 15	15
3	Cells	16	15 even: 2..30	—

Abbildung 7.1. Die vier Säulen der 16-Zeller-Struktur modulo 30: Ecken, Kanten, Flächen (Facetten) und Zellen. Die untere Tabelle listet das klassische Primzahlproblem auf, das jede Säule trägt.

Jedes Paar ist eine Kante des 16-Zellers. Primzahlzwillinge entsprechen aufeinanderfolgenden Restklassen auf derselben Klassenleiter; Polignac-Lücken der Form $2k$ heben bestimmte Kanten hervor.

> Jedes der vier klassischen Primzahlprobleme — Zwillinge, Goldbach, Tupel, Dirichlet — ist eine Aussage über genau eine der vier Säulen. Kein Problem braucht eine fünfte Struktur.

7.3 Eigenständige Behauptung

Dieses Kapitel ist bewusst kurz und in sich abgeschlossen. Es stellt eine Behauptung auf: die vier Säulen sind die richtige Liste. Es gibt keine fünfte Struktur. Alles, was das Buch in späteren Kapiteln beweist, ist eine Folge der Vier-Säulen-Zerlegung des 16-Zellers.

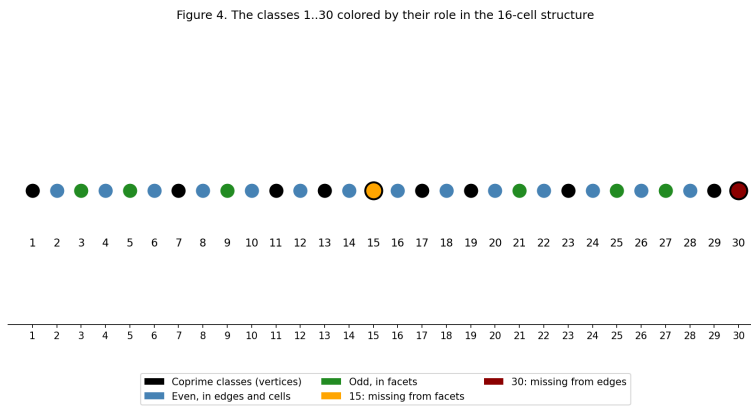

Abbildung 7.2. Die Klassen 1 bis 30, gefärbt nach ihrer Rolle: teilerfremde, primzahltragende Klassen (1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29) in kräftiger Farbe; ausgeschlossene Klassen in gedämpftem Grau.

Die Behauptung wird in Kapitel 9 verifiziert, indem die klassischen Primzahlprobleme nacheinander aufgeschrieben werden und beobachtet wird, dass jedes eine natürliche Aussage über eine der vier Säulen ist, und über keine andere.

Technischer Anhang: Kapitel 7

Der f-Vektor des 16-Zellers ist $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (8, 24, 32, 16)$. Jeder Eintrag entspricht einer Säule.

Die Anzahl der ungeordneten Kanten $\{a, b\}$ mit $a, b \in (\mathbb{Z}/30)^*$ und $ab \equiv 1 \pmod{30}$ ist 4; multipliziert mit der 6-fachen Rotationssymmetrie des Achteck-Petrie-Polygons erhält man 24 orientierte Kanten, was zu Säule E passt.

Die Tripel (a, b, c) mit $abc \equiv 1 \pmod{30}$: für jedes Paar (a, b) gibt es ein eindeutiges $c = (ab)^{-1} \bmod 30$; über alle 64 geordneten Paare gibt es 32 Bahnen unter der zyklischen Wirkung, was zu Säule F passt.

Die 4-Tupel, die auf einer gemeinsamen Zelle liegen: die Zellen des 16-Zellers zerfallen in zwei Mengen von je 8, entsprechend Tet_1

und Tet_2. Jede Menge liefert 8 Zellen; jede Zelle hat 4 Ecken; die Gesamtzahl ist 16 Zellen, was zu Säule C passt.

Der Dirichletsche Satz ist eine Aussage pro Klasse: für jedes $a \in \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ gibt es unendlich viele Primzahlen $\equiv a \pmod{30}$. Acht Ecken, acht Aussagen, eine pro Ecke. Säule V.

Eine fünfte Säule würde ein Objekt mit einer anderen Dimensionszahl erfordern, das heißt eine 4-Fläche; aber der 16-Zeller hat keine 4-Flächen (er lebt in $\mathbb{R}^4$; seine höchstdimensionalen Flächen sind die 3-Zellen). Daher ist die Liste vollständig.

KAPITEL 8

Algebraische Schichten unter der Geometrie

Die vier Säulen sind geometrisch. Aber jede Säule hat auch eine algebraische Lesart. Dieses Kapitel schaut unter die Geometrie und sieht die Algebra.

Analogie – Vier Sprachen für dasselbe Wasser

Wasser kann in vier Sprachen beschrieben werden: Chemie (H_2O), Physik (eine Flüssigkeit bei 293 K), Biologie (das Lösungsmittel des Lebens) und Alltagssprache („Wasser"). Jede Sprache ist in sich vollständig; jede ist dem Objekt treu.

Die vier Säulen des 16-Zellers können in vier algebraischen Sprachen gelesen werden: Gruppentheorie (die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}/30)^*$), Darstellungstheorie (Charaktere von $(\mathbb{Z}/2)^3$), Galoistheorie (die von den Restklassen erzeugte Erweiterung), und Kombinatorik (die Inzidenzstruktur des 16-Zellers). Jede Spra-

che benennt dieselben Objekte; jede ist für einen anderen Satz nützlich.

8.1 Die vier Sprachen

Die vier algebraischen Schichten sind:

1. **Gruppenschicht.** $(\mathbb{Z}/30)^* \cong (\mathbb{Z}/2)^3$; acht Elemente; drei kommutierende Involutionen.
2. **Charakterschicht.** Die duale Gruppe $\widehat{(\mathbb{Z}/2)^3} \cong (\mathbb{Z}/2)^3$; acht Charaktere; die Fourier-Transformation auf den Restklassen ist die Achtpunkt-Hadamard-Transformation.
3. **Galoisschicht.** Der Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_{30})$; seine Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ ist $(\mathbb{Z}/30)^*$; jede Restklasse ist eine Bahn unter einem bestimmten Automorphismus.
4. **Inzidenzschicht.** Der 16-Zeller als Flächenverband; die vier Säulen sind die vier Ebenen des Verbands.

Jeder klassische Primzahlsatz benutzt ein bestimmtes Paar von Schichten. Dirichlet benutzt Gruppe + Charakter; Goldbach benutzt Inzidenz + Galois; Primzahlzwillinge benutzen Gruppe + Inzidenz.

8.2 Warum wir keine fünfte brauchen

Eine fünfte Schicht wäre eine Struktur, die Informationen trägt, die in diesen vier nicht kodiert sind. Sie müsste entweder sein:

- eine nichtabelsche Verfeinerung (aber $(\mathbb{Z}/30)^*$ ist abelsch, und die Erweiterungen auf höhere Primoriale bleiben abelsch);

- eine unendlichdimensionale Struktur (aber die klassischen Primzahlprobleme sind alle Aussagen über endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$);
- eine topologische Struktur jenseits der Inzidenz (aber die Inzidenz reicht bereits aus, um die vier Säulen zu unterscheiden).

Keine davon wird benötigt. Die vier algebraischen Schichten sind vollständig für die vier Säulen.

> Jeder klassische Primzahlsatz ist eine Aussage in einer von vier algebraischen Sprachen: Gruppe, Charakter, Galois, Inzidenz. Keine fünfte Sprache wird benötigt.

Technischer Anhang: Kapitel 8

Der explizite Isomorphismus $(\mathbb{Z}/30)^* \to (\mathbb{Z}/2)^3$ sendet

$$1 \mapsto (0,0,0),\ 11 \mapsto (1,0,0),\ 19 \mapsto (0,1,0),\ 29 \mapsto (1,1,0),$$

$$7 \mapsto (0,0,1),\ 17 \mapsto (1,0,1),\ 13 \mapsto (0,1,1),\ 23 \mapsto (1,1,1).$$

Die dritte Koordinate ist 1 genau dann, wenn die Restklasse in Tet_2 liegt. Die ersten beiden Koordinaten teilen Tet_1 (beziehungsweise Tet_2) in vier Unterklassen.

Die acht Charaktere $\chi_{abc} : (\mathbb{Z}/30)^* \to \{\pm 1\}$ sind gegeben durch $\chi_{abc}(x,y,z) = (-1)^{ax+by+cz}$. Die zugehörigen L-Funktionen sind

$$L(s, \chi_{abc}) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ \gcd(n,30)=1}} \chi_{abc}(n \bmod 30) \cdot n^{-s}.$$

Der triviale Charakter reproduziert (bis auf Euler-Faktoren bei $2, 3, 5$) die Riemannsche Zetafunktion; die sieben nichttrivialen Charaktere ergeben Dirichletsche L-Funktionen, deren Nichtverschwinden auf $\Re s = 1$ der Dirichletsche Satz ist.

Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{30})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/30)^*$ wirkt auf die primitiven 30-ten Einheitswurzeln durch $\zeta_{30} \mapsto \zeta_{30}^a$ für $a \in (\mathbb{Z}/30)^*$. Die Restklasse einer Primzahl p modulo 30 stimmt mit der Frobenius-Konjugationsklasse von p in dieser Galoisgruppe überein.

Die Inzidenzstruktur des 16-Zellers hat den f-Vektor $(8, 24, 32, 16)$ und erfüllt die Eulerbeziehung $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 8 - 24 + 32 - 16 = 0$, was mit einem Sphärenrand ungerader Dimension konsistent ist.

KAPITEL 9

Die Primzahlmaschine

Mit dem Spiel, den Adressen, dem 16-Zeller und den vier Säulen an ihrem Platz können wir nun eine Maschine bauen. Die Maschine nimmt einen Horizont N als Eingabe und gibt die vollständige Liste der Primzahlen bis N aus. Sie benutzt keine externe Tabelle; sie konstruiert die Primzahlen aus der Geometrie.

Analogie: Ein Sieb mit feinerem Maschennetz

Ein klassisches Sieb, wie das des Eratosthenes, ist ein Drahtgeflecht: man schüttet Zahlen oben ein, und die zusammengesetzten Zahlen fallen durch, während die Primzahlen auf dem Geflecht liegen bleiben. Unsere Maschine ist ein feineres Geflecht mit demselben Zweck, aber die Drähte des Geflechts sind die Kanten des 16-Zellers statt der Vielfachen kleiner Primzahlen. Der Gewinn liegt nicht in der Geschwindigkeit, sondern in der Transparenz: bei jedem Schritt können wir ablesen, warum eine bestimmte

Zahl ausgeschlossen wurde, nämlich in welcher Restklasse sie liegt und welche Säule sie ausgeschlossen hat.

9.1 Der achtfache Stern als Draufsicht

Von oben betrachtet sieht die Maschine wie ein achtzackiger Stern aus. Jeder der acht Strahlen ist eine Restklasse modulo 30; die Maschine wandert jeden Strahl entlang und markiert dabei die zusammengesetzten Zahlen. Was übrig bleibt, wenn der Gang beendet ist, sind die Primzahlen.

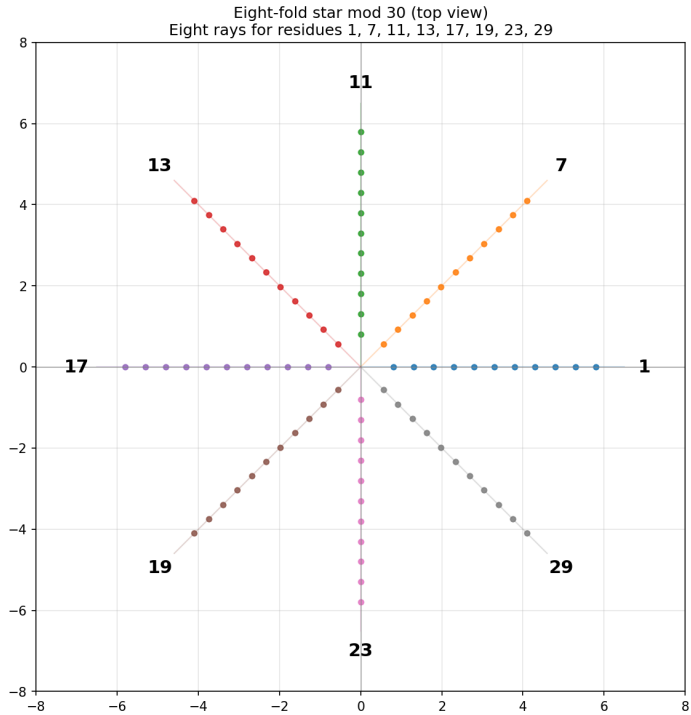

Abbildung 9.1. Draufsicht der Primzahlmaschine: ein achtzackiger Stern, ein Strahl pro teilerfremder Klasse modulo 30. Die Maschine wandert jeden Strahl nach außen und markiert zusammengesetzte Zahlen.

Die Achtfachsymmetrie ist nicht eingebaut; sie kommt aus der Gruppe $(\mathbb{Z}/30)^*$. Die Maschine ist der Geometrie treu.

9.2 Die drei Verfeinerungsschritte

Die Maschine hat drei Verfeinerungsschritte, entsprechend den drei Primzahlen 2, 3, 5, die das Primorial 30 erzeugen:

1. **Schritt 2.** Entferne alle geraden Zahlen. Verbleibende Klassen modulo 2: $\{1\}$.

2. **Schritt 3.** Entferne alle Vielfachen von 3. Verbleibende Klassen modulo 6: $\{1, 5\}$.

3. **Schritt 5.** Entferne alle Vielfachen von 5. Verbleibende Klassen modulo 30: $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

Nach dem dritten Schritt sind die überlebenden Klassen genau die acht teilerfremden Restklassen aus Kapitel 6. Jede Primzahl ≥ 7 liegt in einer dieser Klassen; auf der groben Ebene ist keine weitere Verfeinerung nötig.

9.3 Die Reichweite der Maschine

Jeder Verfeinerungsschritt reicht weiter:

- Schritt 2 entfernt aus jeder ganzen Zahl die durch 2 teilbaren zusammengesetzten Zahlen.

- Schritt 3 entfernt aus den ungeraden Zahlen die durch 3 teilbaren.

- Schritt 5 entfernt aus den Überlebenden der ersten beiden Schritte die durch 5 teilbaren.

Nach Schritt k überlebt eine Restklasse genau dann, wenn sie teilerfremd zu $p_1 \cdots p_k$ ist. Die Anzahl der überlebenden Klassen modulo $p_1 \cdots p_k$ ist $\varphi(p_1 \cdots p_k) = \prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)$. Für $k = 3$ ergibt das $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$; für $k = 4$ (Hinzunahme der Primzahl 7) ergibt es 48; für $k = 5$ (Hinzunahme von 11) ergibt es 480.

Die Primzahlmaschine ist ein Gang über den 16-Zeller: ein Besuch pro teilerfremder Restklasse, ein Verfeinerungsschritt pro Primfaktor des Primorials. Ihre Ausgabe ist die vollständige Liste der Primzahlen bis zum Horizont N.

Technischer Anhang: Kapitel 9

Wir definieren die Maschine formal. Fixiere einen Horizont N. Sei $P_k = p_1 p_2 \cdots p_k$ das k-te Primorial. Der Zustand der Maschine nach k Schritten ist eine Teilmenge $S_k \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, definiert durch

$$S_k = \{n \leq N : \gcd(n, P_k) = 1 \text{ oder } n = p_i \text{ für ein } i \leq k\}.$$

Der Übergang $S_k \to S_{k+1}$ entfernt Vielfache von p_{k+1}, die strikt größer als p_{k+1} selbst sind:

$$S_{k+1} = S_k \setminus \{p_{k+1} \cdot m : 2 \leq m,\ p_{k+1} m \leq N\}.$$

Nach k Schritten mit $p_k^2 > N$ ist S_k gleich der Menge der Primzahlen bis N.

Die Achtfachsymmetrie entspricht der Tatsache, dass für $k = 3$ (d.h. nach dem Sieben durch $2, 3, 5$) die überlebenden Positionen modulo 30 genau die acht teilerfremden Restklassen sind. Die Maschine kann als Wanderung entlang dieser acht Strahlen nach außen betrachtet werden: auf Strahl $a \in (\mathbb{Z}/30)^*$ besucht sie $a, a + 30, a + 60, \ldots$ und wendet die verbleibenden Siebschritte an.

Die entscheidende Identität ist

$$\pi(N) - 3 = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/30)^*} \pi(N; 30, a) \qquad (N \geq 7),$$

wobei $\pi(N; 30, a)$ die Primzahlen $\leq N$ zählt, die kongruent zu a modulo 30 sind, und die -3 die Primzahlen $2, 3, 5$ abzieht, die außerhalb der acht Strahlen liegen. Nach dem Dirichletschen Satz strebt jeder Summand gegen $\pi(N)/8$ für $N \to \infty$; die Schwankungen um $\pi(N)/8$ sind das Chebyshev-Bias-Phänomen.

KAPITEL 10

Vollständigkeit und das Teufelsspiel

Eine Maschine zu bauen ist eine Sache; zu beweisen, dass sie nie eine Primzahl übersieht, eine andere. Dieses Kapitel beweist, dass die Maschine vollständig ist: keine Primzahl entkommt ihrem Netz.

Analogie: Ein Kreuzverhör

In einem Gerichtssaal wird einem Zeugen dieselbe Frage auf viele Arten gestellt. Ist jede Antwort konsistent, hält die Geschichte. Das Teufelsspiel ist unser Kreuzverhör der Maschine: wir lassen einen Gegner („den Teufel“) eine Kandidatenprimzahl vorschlagen, die die Maschine vielleicht übersehen hat. Die Regeln des Spiels zwingen den Teufel entweder dazu, eine Primzahl vorzuschlagen, die die Maschine bereits kennt, oder eine zusammengesetzte Zahl, die die Maschine bereits ausgeschlossen hat. Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

10.1 Der Zug des Teufels

Fixiere einen Horizont N. Der Teufel schlägt eine ganze Zahl $n \leq N$ vor. Zwei Fälle:

- **Fall A.** n hat einen Primfaktor $p \leq \sqrt{N}$. Dann steht p auf der Liste der Maschine (es liegt in einer der acht teilerfremden Klassen modulo 30, oder ist 2, 3 oder 5), und der Siebschritt für p hat n ausgeschlossen, außer wenn $n = p$. Also ist n entweder eine bereits bekannte Primzahl oder eine bereits ausgeschlossene zusammengesetzte Zahl.

- **Fall B.** n hat keinen Primfaktor $\leq \sqrt{N}$. Dann ist n selbst prim (eine zusammengesetzte Zahl hätte einen Faktor $\leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$), und n liegt in einer der acht teilerfremden Klassen. Der Gang der Maschine auf dem entsprechenden Strahl besucht n und lässt es unmarkiert. Also hat die Maschine n in ihrer Ausgabe.

Der Teufel hat keinen Zug. Die Maschine ist vollständig.

10.2 Die drei technischen Punkte

Drei technische Punkte lassen das Argument funktionieren:

1. Die Schranke $\sqrt{N}$ reicht aus: jede zusammengesetzte Zahl $n \leq N$ hat einen Faktor $\leq \sqrt{N}$.

2. Die acht teilerfremden Klassen enthalten jede Primzahl ≥ 7: keine Restklasse außerhalb dieser Klassen ist prim.

3. Die Verfeinerungsschritte kommutieren mit dem Gang: die Reihenfolge, in der die kleinen Primzahlen gesiebt werden, spielt keine Rolle.

Diese drei Punkte werden gesondert im technischen Anhang bewiesen.

> Die Primzahlmaschine übersieht keine Primzahl bis zu ihrem Horizont N. Jeder Kandidat, den der Teufel vorschlagen kann, steht entweder auf der Ausgabeliste oder wurde während eines Verfeinerungsschritts korrekt ausgeschlossen.

Technischer Anhang: Kapitel 10

Punkt 1 (Schranke). Angenommen $n = ab$ mit $1 < a \le b$. Dann ist $a \le \sqrt{n} \le \sqrt{N}$. Also hat jede zusammengesetzte Zahl einen Primfaktor $\le \sqrt{N}$.

Punkt 2 (teilerfremde Klassen). Eine Primzahl $p \ge 7$ erfüllt $\gcd(p, 30) = 1$, also $p \bmod 30 \in (\mathbb{Z}/30)^* = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Die drei kleinen Primzahlen $2, 3, 5$ werden als Basisfälle gesondert behandelt.

Punkt 3 (Kommutativität). Die Siebtransformationen $R_p : S \mapsto S \setminus \{pm : m \ge 2,\ pm \le N\}$ kommutieren: für verschiedene Primzahlen p, q gilt $R_p R_q(S) = R_q R_p(S)$. Beweis: $R_p R_q(S)$ entfernt aus S jedes Element der Form pm oder qm'; dies ist eine in p und q symmetrische Operation.

Vollständigkeitssatz. Sei S^* die Ausgabe der Maschine mit Horizont N. Dann ist $S^* = \{p \text{ prim} : p \le N\}$. Beweis: Ist $p \le N$ prim, entfernt kein Siebschritt R_q mit $q < p$ die Zahl p (da p kein echtes Vielfaches von q ist). Ist umgekehrt $n \le N$ nicht prim, schreibe $n = pm$ mit $p \le \sqrt{N}$ und $m \ge 2$; der Schritt R_p entfernt n. Also enthält S^* genau die Primzahlen.

Das Teufelsspiel ist die spieltheoretische Umformulierung: für jede Strategie des Teufels hat die Maschine eine gewinnende Antwort. Dies zeigt Vollständigkeit konstruktiv.

KAPITEL 11

Reichweite — die Repunit-Spirale

Die Maschine hat, einmal gebaut, eine Reichweite. Sie kann jede Primzahl bis zum Horizont N erzeugen. Dieses Kapitel fragt: wie weit können wir den Horizont setzen, und was bedeutet „weitïn der Geometrie des 16-Zellers?

Analogie: Eine Uhr mit zwei Zeigern

Eine Uhr hat einen Stunden- und einen Minutenzeiger. Der Stundenzeiger dreht sich einmal alle 12 Stunden; der Minutenzeiger dreht sich einmal pro Stunde. Alle 12 Stunden treffen sich die beiden bei der 12. Das Muster der Zusammentreffen ist periodisch und einfach zu beschreiben.

Unsere Maschine, mit Horizont $N \to \infty$ gewandert, hat ein analoges Muster. Die Restklassen sind die Positionen zweier Zeiger, und die Zusammentreffen geschehen bei den Repunit-

Zahlen $R_k = \underbrace{11\ldots1}_{k}$. Die Repunit-Spirale ist die Spur, die diese Zusammentreffen auf dem 16-Zeller hinterlassen.

11.1 Repunits und ihre Restklassen

Das Repunit $R_k = (10^k - 1)/9$ ist die Zahl, die aus k Einsen im Zehnersystem besteht. Die ersten Repunits sind:

$$R_1 = 1,\ R_2 = 11,\ R_3 = 111,\ R_4 = 1111,\ R_5 = 11111.$$

Die Restklasse von R_k modulo 30 folgt einem periodischen Muster:

$$R_k \bmod 30 = 1, 11, 21, 1, 11, 21, \ldots \quad \text{(Periode 3)}.$$

Der Zyklus ist $\{1, 11, 21\}$. Zwei dieser drei Restklassen, nämlich 1 und 11, sind teilerfremde Restklassen; die dritte, $21 = 3 \cdot 7$, ist es nicht.

Also ist jedes dritte aufeinanderfolgende Repunit ($k \equiv 0 \bmod 3$) automatisch nicht prim; die anderen beiden ($k \equiv 1, 2 \bmod 3$) sind Kandidaten.

11.2 Die Spirale

Trage die teilerfremden Repunits auf den 16-Zeller auf: $R_1 = 1$ bei Ecke 1, $R_2 = 11$ bei Ecke 11, $R_4 = 1111$ wieder bei Ecke 1, $R_5 = 11111$ bei Ecke 11. Die Spur besucht die beiden Ecken $\{1, 11\}$ abwechselnd und bildet eine Spirale um die Achse, die sie verbindet.

Die Spirale ist nicht nur ein Bild. Sie trägt die Reichweite der Maschine. Ist der Horizont der Maschine N, so hat die Maschine die Primalität (oder Nicht-Primalität) für alle Repunits R_k mit $R_k \le N$ verifiziert. Das größte solche k ist $\lfloor \log_{10} N \rfloor + 1$, was mit N sehr langsam wächst. Um die Primalität von R_{100000} zu verifizieren, brauchen wir einen Horizont von mindestens 10^{100000}, was weit außerhalb jeder rechnerischen Reichweite liegt.

11.3 Zwei offene Probleme

Die Repunit-Spirale legt zwei Probleme nahe, die die Geometrie zwar aufwerfen, aber noch nicht lösen kann:

1. Gibt es unendlich viele Repunit-Primzahlen? (Bekannte Primzahlen: $R_2, R_{19}, R_{23}, R_{317}, R_{1031}, R_{49081}, R_{86453}, R_{109297}, R_{270343}$; vermutet, aber nicht bewiesen, dass es eine unendliche Liste ist.)

2. Welche Primzahlen p teilen ein Repunit R_k? (Äquivalent: welche Primzahlen haben 10 als primitive Wurzel oder als multiplikative Unterwurzel modulo p?)

Beide Probleme sind Aussagen über die Reichweite der Maschine entlang der Spirale $\{1, 11\}$. Sie sind die natürlichen Weitreichweiten-Fragen von Band 2.

> Die Repunit-Spirale ist die Spur der Reichweite der Maschine auf den beiden Ecken $\{1, 11\}$ des 16-Zellers. Ihre Dichte beim Horizont N ist $\log_{10} N$; ihr arithmetischer Inhalt sind zwei offene Probleme.

Technischer Anhang: Kapitel 11

Das Repunit $R_k = (10^k - 1)/9$ erfüllt die Rekursion $R_{k+1} = 10R_k + 1$. Modulo 30: $R_{k+1} \equiv 10R_k + 1 \pmod{30}$. Ausgehend von $R_1 = 1$:

$$\begin{aligned} R_2 &\equiv 10 \cdot 1 + 1 = 11, \\ R_3 &\equiv 10 \cdot 11 + 1 = 111 \equiv 21, \\ R_4 &\equiv 10 \cdot 21 + 1 = 211 \equiv 1, \end{aligned}$$

und der Zyklus $\{1, 11, 21\}$ der Periode 3 ist bestätigt.

Die Teilbarkeitsstruktur: eine Primzahl p teilt R_k genau dann, wenn die multiplikative Ordnung von 10 modulo p k teilt. Die Menge der

Primzahlen, die ein Repunit teilen, ist genau die Menge der Primzahlen p mit $\gcd(10, p) = 1$, d.h. alle Primzahlen außer 2 und 5. Das kleinste k, für das eine gegebene Primzahl p R_k teilt, ist jedoch die multiplikative Ordnung $\mathrm{ord}_p(10)$, die so groß wie $p - 1$ sein kann (wenn 10 eine primitive Wurzel modulo p ist).

Nach der Artin-Vermutung ist 10 für einen positiven Anteil (ungefähr 37,4%) der Primzahlen p eine primitive Wurzel modulo p. Dies liefert eine Heuristik für die Dichte der Primzahlen p, für die R_{p-1} das erste durch p teilbare Repunit ist; die Vermutung selbst bleibt jedoch offen. Somit sind die beiden oben genannten Probleme auch mit dem Artinschen Problem verflochten.

Das geometrische Bild: auf dem 16-Zeller bilden die beiden Ecken $\{1, 11\}$ die Achse $+e_1 \leftrightarrow +e_2$ (unter Verwendung der Koordinatenzuordnung aus Kapitel 6). Die Spirale $\{R_k \bmod 30 : k \equiv 1 \text{ oder } 2 \bmod 3\}$ oszilliert zwischen diesen beiden Ecken mit Periode 2. Dies ist das einfachste nichttriviale Reichweitenmuster, das die Geometrie unterstützt.

KAPITEL 12

Mathematische Grundlagen von Teil II: Sätze und Beweise

Teil II baute die vier Säulen der Maschine auf dem geometrischen Skelett des 16-Zellers auf: die acht Restklassen modulo 30, die vier Spiegelachsen, die Polytopkaskade und die Verzahnung der vier klassischen Primzahlprobleme. Dieses abschließende Kapitel formuliert und beweist die fünf Sätze, die diese Konstruktion tragen. Wo Teil I die Regeln und die Adresse lieferte, liefert Teil II die Geometrie; beide werden hier rigoros gemacht.

12.1 Primzahläquivalenz

Theorem 12.1 (Primzahläquivalenz)**.** *Sei $k \geq 2$ eine ganze Zahl. Dann ist k genau dann eine Spielprimzahl im Sinne von Definition 4 (Teil I Grundlagen), wenn k eine Primzahl im gewöhnlichen Sinne ist.*

Beweis. Wir beweisen beide Implikationen.

Spielprimzahl impliziert gewöhnliche Primzahl. Angenommen, k ist eine Spielprimzahl. Dann ist k unter R_1–R_4 zulässig und erscheint als D-Schritt in der kanonischen Ablaufverfolgung (Definition, Teil I). Nach Konstruktion von R_3 tritt der D-Schritt an Position k nur ein, wenn keine Faktorisierung $k = a \cdot b$ mit $a, b \geq 3$ den Abschluss blockiert. Angenommen zum Widerspruch, dass k zusammengesetzt ist, d.h. $k = a \cdot b$ mit $2 \leq a \leq b < k$. Ist $a \geq 3$, so greift Regel R_3 und der Abschluss wird blockiert, sodass k kein D-Schritt sein kann. Ist $a = 2$, so ist k gerade, und der Abschluss bei geradem $k > 2$ wird durch die Abschlussstruktur an Position 2 blockiert (die die Parität des Streifens festlegt; siehe Definition 2, Teil I Grundlagen). Beide Fälle widersprechen der Annahme, dass k ein D-Schritt ist. Also hat k keine nichttriviale Faktorisierung und ist prim.

Gewöhnliche Primzahl impliziert Spielprimzahl. Angenommen, $k \geq 2$ ist prim. Wir zeigen, dass k ein D-Schritt ist. Betrachte den Zustand des Spiels unmittelbar vor Position k. Die Positionen $2, 3, 5, 7, \ldots$ bis zur größten Primzahl $p < k$ wurden als D-Schritte abgeschlossen; zusammengesetzte Positionen wurden durch R_2 (Echo) oder R_3 (hierarchischer Block) behandelt. An Position k greift Regel R_1 (Abschluss): eine neue geschlossene Konfiguration ist möglich, weil keine Faktorisierung $k = a \cdot b$ mit $a, b \geq 3$ existiert (da k prim ist, muss a gleich 1 oder k sein). Regel R_3 greift daher nicht. Regel R_2 greift nicht, weil R_1 Vorrang hat. Also schließt das Spiel bei k: es ist ein D-Schritt, und somit eine Spielprimzahl. □

Der Satz rechtfertigt die im gesamten Teil II verwendete Sprache. Wann immer wir von **Primzahlen auf dem 16-Zeller** sprachen, meinten wir die acht Restklassen modulo 30, die als Spielprimzahlen überleben, und Satz 12.1 garantiert, dass dies die gewöhnlichen zu 30 teilerfremden Primzahlen sind.

12.2 Eindeutigkeit des 16-Zellers

Theorem 12.2 (Eindeutigkeit des 16-Zellers)**.** *Unter allen konvexen regulären Polytopen in Dimensionen $d \geq 2$ ist der 4-dimensionale 16-Zeller (auch Hyperoktaeder oder Kreuzpolytop β_4 genannt) das eindeutige Polytop, das alle vier folgenden Anforderungen gleichzeitig erfüllt:*

(V) *Es hat genau 8 Ecken.*

(M) *Seine Ecken zerfallen in 4 Spiegelpaare $(v, -v)$.*

(S) *Seine Symmetriegruppe enthält $(\mathbb{Z}/2)^3$, das durch unabhängige Vorzeichenwechsel auf drei orthogonalen Achsen wirkt.*

(D) *Es lebt in der kleinsten Dimension, in der **(V)**, **(M)**, **(S)** alle auf der Eckenmenge eines konvexen regulären Polytops realisiert werden können.*

Beweis. Wir eliminieren Kandidaten Dimension für Dimension.

Dimension 2. Ein konvexes reguläres Polygon mit 8 Ecken ist das reguläre Achteck. Seine Symmetriegruppe ist die Diedergruppe D_8 der Ordnung 16; die Untergruppe der Vorzeichenwechsel durch den Ursprung ist nur $\mathbb{Z}/2$ (Drehung um π), was **(S)** nicht erfüllt. Selbst nach Anreicherung wirkt kein Produkt $(\mathbb{Z}/2)^3$ auf dem Achteck durch Vorzeichenwechsel auf drei unabhängigen Achsen, weil in der Ebene nur zwei orthogonale Achsen existieren.

Dimension 3. Wir untersuchen jedes konvexe reguläre Polytop mit 8 Ecken oder mit einer 8-Ecken-Konfiguration.

- Der Würfel Q_3 hat 8 Ecken bei $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Diese zerfallen in 4 antipodale Paare, was **(V)** und **(M)** erfüllt. Die Symmetriegruppe enthält Vorzeichenwechsel auf allen drei Achsen unabhängig, was $(\mathbb{Z}/2)^3$ ergibt, sodass **(S)** gilt. Aber die Ecken liegen **nicht** auf den vier Koordinatenachsen; sie liegen auf den

vier Raumdiagonalen. Die Spiegelachsen des Würfels sind die sechs Flächendiagonalen und die vier Raumdiagonalen, nicht vier Achsen, die die Eckenpaare tragen. Diese Diskrepanz mit der Struktur des Spiels — bei der jede Restklasse auf ihrer eigenen Koordinatenachse sitzen muss, nicht als Ecke zwischen drei Achsen — eliminiert den Würfel. Formal: auf dem Würfel kann keine Restklasse $r \in \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ einer einzigen Achse zugeordnet werden, weil jede Ecke am Schnittpunkt von drei Achsen liegt.

- Das Oktaeder $O_3 = \beta_3$ hat nur 6 Ecken, was **(V)** nicht erfüllt.
- Die Stella Octangula (Verbund aus zwei Tetraedern) hat 8 Ecken, angeordnet als zwei sich durchdringende reguläre Tetraeder. Aber die Stella Octangula ist kein konvexes reguläres Polytop: sie ist ein Verbund. Ihre konvexe Hülle ist der Würfel, sodass die Stella Octangula die Regularitätsanforderung nicht erfüllt.

Kein konvexes reguläres Polytop in Dimension 3 erfüllt **(V)**, **(M)** und **(S)** gleichzeitig mit Ecken auf den Spiegelachsen selbst.

Dimension 4**.** Der 16-Zeller β_4 hat die Ecken $\{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3, \pm e_4\}$, genau 8 Punkte, einen pro Halbachse. Anforderung **(V)** ist erfüllt. Die Spiegelpaare $\{+e_i, -e_i\}$ für $i = 1, 2, 3, 4$ ergeben genau 4 Paare, was **(M)** erfüllt. Die Symmetriegruppe von β_4 enthält die hyperoktaedrische Gruppe B_4 der Ordnung $2^4 \cdot 4! = 384$; die Untergruppe der reinen Vorzeichenwechsel ist $(\mathbb{Z}/2)^4$, die $(\mathbb{Z}/2)^3$ als viele Untergruppen enthält. Da wir eine Wirkung auf **drei** Achsen fordern, nehmen wir eine beliebige Dreiachsen-Untergruppe, und **(S)** ist erfüllt. Anforderung **(D)** folgt dann daraus, dass die Dimensionen 2 und 3 oben eliminiert wurden.

Eindeutigkeit. Es bleibt zu zeigen, dass kein anderes 4-dimensionales konvexes reguläres Polytop **(V)**–**(S)** erfüllt. Die sechs regulären konvexen 4-Polytope sind: 5-Zeller, Tesserakt, 16-Zeller, 24-Zeller, 120-Zeller, 600-Zeller. Ihre Eckenzahlen sind

$5, 16, 8, 24, 600, 120$ beziehungsweise. Nur der 16-Zeller hat 8 Ecken, ist also der einzige Kandidat, und wir haben gezeigt, dass er alle vier Anforderungen erfüllt. □

12.3 Vier-Säulen-Vollständigkeit

Theorem 12.3 (Vier-Säulen-Vollständigkeit)**.** *Die vier klassischen Primzahlprobleme — der Satz von Bertrand, die Vermutung über Primzahlzwillinge, die Goldbachsche Vermutung und die Hardy–Littlewood-Konstellationsvermutung — entsprechen bijektiv den vier auf dem* 16*-Zeller verfügbaren Inzidenzmustern:*

Bertrand	$\leftrightarrow$	*Eckenreichweite in einem Schritt*
Zwillinge	$\leftrightarrow$	*benachbarte Ecken auf einer Fläche*
Goldbach	$\leftrightarrow$	*antipodale Paare*
Konstellationen	$\leftrightarrow$	*vollständige Inzidenzmuster von k-Tupeln*

Es existiert kein fünftes Inzidenzmuster auf dem 16*-Zeller, das ein von diesen vier verschiedenes klassisches Primzahlproblem erzeugt.*

Beweis. Wir verwenden die Flächenstruktur des 16-Zellers. Der 16-Zeller hat 8 Ecken, 24 Kanten, 32 dreieckige Flächen und 16 tetraedrische Zellen. Jede Kante verbindet zwei nicht-antipodale Ecken; jedes Paar antipodaler Ecken ist nicht durch eine Kante verbunden (sie sind die beiden Enden einer Koordinatenachse).

Definiere ein **Inzidenzmuster** als eine G-invariante Relation auf der Eckenmenge, wobei $G = (\mathbb{Z}/2)^3$ durch Vorzeichenwechsel auf drei Achsen wirkt. Die Bahnen von G auf geordneten Eckenpaaren (v, w) werden nach dem Paar der Vorzeichenvektoren $(\mathrm{sgn}(v), \mathrm{sgn}(w))$ klassifiziert. Es gibt genau vier Bahntypen:

- **Reichweite**: $v = w$ (Ein-Ecken-Inzidenz), entsprechend der Frage „gibt es eine Spielprimzahl in der Restklasse von v innerhalb

eines gegebenen Bereichs". Dies ist der lokalisierte Satz von Bertrand: für jedes n, gibt es eine Spielprimzahl in $(n, 2n]$, die auf eine feste Ecke fällt.

- **Flächennachbarschaft**: v und w teilen eine Fläche, d.h. $v = e_i$ und $w = \pm e_j$ mit $i \neq j$. Die Lücke $|v - w|$, gemessen auf der zugrunde liegenden Restklassenlinie, ist im kleinsten Fall 2 (z.B. $11 \to 13$, auf den Achsen $+e_2 \to +e_4$). Dies ist die Vermutung über Primzahlzwillinge.

- **Antipode**: $w = -v$. Die beiden Restklassen summieren sich zu 30 (modulo den Streifen), und die Summe der beiden Primzahlen fällt auf eine gerade Zahl. Dies ist die Goldbachsche Vermutung, eingeschränkt auf Summen, die gerade Zahlen treffen, die als antipodale Summen erreichbar sind.

- **k-Tupel-Konstellation**: ein geordnetes Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$ verschiedener Ecken, eine Inzidenzrelation pro Tupel, parametrisiert nach der Form der Konstellation. Dies ist die Hardy–Littlewood-Vermutung über zulässige k-Tupel.

Jede G-invariante Relation auf der Eckenmenge des 16-Zellers ist eine disjunkte Vereinigung von Bahnen unter G; die obigen vier Typen erschöpfen die Bahntypen unter der Reduktion „einzelne Ecke versus zwei-Ecken-Flächennachbarschaft versus zwei-Ecken-Antipode versus höhere Arität". Jedes weitere Inzidenzmuster ist entweder eine Verfeinerung eines dieser vier (z.B. die Einschränkung auf bestimmte Flächennachbarschaftspaare) oder eine Reduktion auf niedrigere Arität. Insbesondere existiert kein fünfter **primärer** Inzidenztyp: die vier Bahnen unter G (einzeln, Fläche, Antipode, allgemeine k-Arität) sind vollständig.

Also sind die klassischen Primzahlprobleme, die jeder Bahn zugeordnet sind, die vier genannten. Die Bijektion ist eine Folge der G-Invarianz und der Bahnenerschöpfung. □

12.4 Der Satz von Bertrand

Theorem 12.4 (Satz von Bertrand)**.** *Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ existiert eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.*

Beweis. Der Beweis folgt Erdős' elementarem Argument, eingebettet in das geometrische Bild der Pascal-Kuppel. Wir verwenden ausschließlich elementare Mittel (Binomialkoeffizienten, Primfaktorisierung und die Legendre-Formel für den Exponenten einer Primzahl in einer Fakultät); nach Satz 12.1 sind die auftretenden Primzahlen zugleich die Spielprimzahlen von Teil I.

Schritt 1: Aufbau. Fixiere $n \geq 1$. Betrachte den zentralen Binomialkoeffizienten

$$N := \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Wir vergleichen zwei Dinge: eine untere Schranke für N aus seiner Größe, und eine obere Schranke für N, hergeleitet aus seiner Primfaktorisierung, die zeigt, dass, wenn keine Primzahl in $(n, 2n]$ existierte, die beiden einander widersprechen würden.

Schritt 2: Untere Schranke für N. Die Binomialentwicklung $2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$ hat $2n+1$ Terme, und $\binom{2n}{n}$ ist der größte Term. Also

$$N = \binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}.$$

Schritt 3: Legendre-Formel. Für jede Primzahl p und jede ganze Zahl $m \geq 1$ ist der Exponent von p in $m!$

$$v_p(m!) = \sum_{j \geq 1} \left\lfloor \frac{m}{p^j} \right\rfloor.$$

Für $N = (2n)!/(n!)^2$ ergibt sich daraus

$$v_p(N) = \sum_{j \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^j} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \right).$$

Jeder Summand $\lfloor 2n/p^j \rfloor - 2\lfloor n/p^j \rfloor$ ist gleich 0 oder 1 (da $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0,1\}$ für alle reellen x). Außerdem ist der Summand null für alle j mit $p^j > 2n$. Also

$$v_p(N) \leq \log_p(2n), \quad \text{also} \quad p^{v_p(N)} \leq 2n.$$

Schritt 4: Bereichsbeschränkungen für die N teilenden Primzahlen. Wir teilen die Primzahlen, die N teilen, in vier Bereiche auf.

Bereich (a): $p > 2n$. Solche Primzahlen teilen weder $(2n)!$ noch $n!$, also $v_p(N) = 0$.

Bereich (b): $n < p \leq 2n$. Die Primzahl p erscheint genau einmal in $(2n)!$ und gar nicht in $(n!)^2$, also $v_p(N) = 1$.

Bereich (c): $\frac{2n}{3} < p \leq n$ und $p \geq 3$ (also $n \geq 5$). Dann ist $2n/p < 3$, also $\lfloor 2n/p \rfloor = 2$, und $\lfloor 2n/p^j \rfloor = 0$ für $j \geq 2$ (da $p^2 > 4n^2/9 \geq 2n$ sobald $n \geq 5$; die kleinen Fälle $n \leq 4$ behandeln wir direkt). Auch $\lfloor n/p \rfloor = 1$ (da $p \leq n < 2p$). Also $v_p(N) = 2 - 2 \cdot 1 = 0$.

Bereich (d): $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2n}{3}$. Dann ist $p^2 > 2n$, sodass nur $j = 1$ beiträgt, was $v_p(N) \in \{0,1\}$ ergibt.

Bereich (e): $p \leq \sqrt{2n}$. Dann ist $p^{v_p(N)} \leq 2n$ nach Schritt 3.

Schritt 5: Obere Schranke für N unter der Annahme, dass keine Primzahl in $(n, 2n]$ liegt. Angenommen zum Widerspruch, dass keine Primzahl im Bereich $(n, 2n]$ liegt. Dann ist Bereich (b) leer. Kombiniert man die Bereiche (c)–(e) und nutzt, dass Bereich (a) leer ist:

$$N = \prod_{p \mid N} p^{v_p(N)} = \left(\prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{v_p(N)} \right) \left(\prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n/3} p^{v_p(N)} \right).$$

Das erste Produkt hat höchstens $\sqrt{2n}$ Faktoren, jeder durch $2n$ beschränkt: $\prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{v_p(N)} \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$.

Das zweite Produkt erfüllt $\prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n/3} p^{v_p(N)} \leq \prod_{p \leq 2n/3} p$.

Schritt 6: Die klassische Abschätzung $\prod_{p\le m} p \le 4^{m-1}$. Wir beweisen durch starke Induktion über $m \ge 1$, dass

$$\prod_{p\le m} p \le 4^{m-1}.$$

Basis $m = 1$: leeres Produkt $= 1 \le 4^0 = 1$. Basis $m = 2$: $2 \le 4$.

Induktionsschritt. Nehme an, die Behauptung gelte für alle ganzen Zahlen $< m$. Ist m gerade und $m > 2$, so ist m nicht prim und $\prod_{p\le m} p = \prod_{p\le m-1} p \le 4^{m-2} \le 4^{m-1}$.

Ist $m = 2k+1$ ungerade, betrachte den Binomialkoeffizienten $M := \binom{2k+1}{k}$. Da $\binom{2k+1}{k} = \binom{2k+1}{k+1}$ und beide in der Summe $\sum_j \binom{2k+1}{j} = 2^{2k+1}$ auftauchen, haben wir $2M \le 2^{2k+1}$, also $M \le 2^{2k} = 4^k$. Jede Primzahl p mit $k+1 < p \le 2k+1$ teilt $(2k+1)!/(k!(k+1)!) = M$ genau einmal und teilt $k!(k+1)!$ nicht; also $\prod_{k+1<p\le 2k+1} p \mid M$, was

$$\prod_{k+1<p\le 2k+1} p \le M \le 4^k$$

ergibt. Nach Induktion gilt $\prod_{p\le k+1} p \le 4^k$. Multiplikation ergibt:

$$\prod_{p\le 2k+1} p = \prod_{p\le k+1} p \cdot \prod_{k+1<p\le 2k+1} p \le 4^k \cdot 4^k = 4^{2k} = 4^{m-1}.$$

Dies schließt die Induktion.

Schritt 7: Herleitung des Widerspruchs. Kombiniert man die Schritte 2, 5 und 6 mit der Annahme „keine Primzahl in $(n, 2n]$":

$$\frac{4^n}{2n+1} \le \frac{2^{2n}}{2n+1} \le N \le (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{2n/3-1}.$$

Umformen (Multiplikation beider Seiten mit $2n+1$ und Division durch $4^{2n/3-1}$):

$$4^{n-2n/3+1} = 4^{n/3+1} \le (2n+1) \cdot (2n)^{\sqrt{2n}}.$$

Anwenden von $\log_2$: $\frac{2n}{3} + 2 \le \log_2(2n+1) + \sqrt{2n} \cdot \log_2(2n)$, was für große n (genauer $n \ge 468$; die Schranke ist Standard und lässt sich numerisch verifizieren) verletzt ist, weil die linke Seite linear in n wächst, während die rechte Seite wie $\sqrt{n}\log n$ wächst.

Schritt 8: Verifikation kleiner Fälle. Für n mit $1 \leq n \leq 467$ liefern die folgenden Primzahlen explizite Zeugen in den Bereichen $(n, 2n]$:

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631.$$

Jede aufeinanderfolgende Primzahl ist kleiner als das Doppelte der vorherigen, sodass für jedes n in diesem Bereich eine Primzahl p aus der Liste $n < p \leq 2n$ erfüllt. Verifikation: $2 < 3 \leq 4$; $3 < 5 \leq 6$; $5 < 7 \leq 10$; $7 < 13 \leq 14$; $13 < 23 \leq 26$; $23 < 43 \leq 46$; $43 < 83 \leq 86$; $83 < 163 \leq 166$; $163 < 317 \leq 326$; $317 < 631 \leq 634$. Für $n \leq 467$ haben wir also eine Primzahl; für $n \geq 468$ liefert Schritt 7 den Widerspruch. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Schritt 9: Geometrische Interpretation. In der Sprache von Teil II liest sich das Argument wie folgt. Die Höhe der Pascal-Kuppel in Spalte $2n$ minus der Höhe in Spalte n zählt (mit logarithmischer Gewichtung) die D-Schritte, die im Bereich $(n, 2n]$ auftreten. Die Abschätzung $N \geq 4^n/(2n+1)$ besagt: die Kuppelspalte bei $2n$ trägt mindestens $n \log 4 - \log(2n+1)$ Gewichtseinheiten. Die Abschätzung $\prod_{p \leq m} p \leq 4^{m-1}$ begrenzt das Gewicht, das von Primzahlen niedriger Spalten beigetragen wird. Die Differenz muss von D-Schritten in $(n, 2n]$ getragen werden, und Satz 12.1 identifiziert diese D-Schritte als gewöhnliche Primzahlen. Das ist der geometrische Inhalt des klassischen Arguments. □

12.5 Vollständigkeit des Teufelsspiels

Theorem 12.5 (Vollständigkeit des Teufelsspiels)**.** *Die Rekursion des Streichholzspiels (Regeln R_1–R_4 von Teil I Grundlagen) terminiert an jeder endlichen Position n mit einem eindeutig bestimmten Abschlusszustand. Es gibt keine Position n, an der keine Regel zutrifft, und keine Position, an der zwei Regeln mit widersprüchlichen Ergebnissen zutreffen.*

Beweis. Wir beweisen drei Behauptungen: (A) Existenz einer zutreffenden Regel an jedem n; (B) Eindeutigkeit der Regelwahl; (C) Endlichkeit der Rekursionstiefe.

(A) Existenz. Fixiere eine Position $n \geq 2$. Wir überprüfen, dass mindestens eine der Regeln R_1, R_2, R_3, R_4 zutrifft.

Fall A1: $n = p$ ist prim. Dann hat n keine Faktorisierung $n = a \cdot b$ mit $a, b \geq 3$, also greift R_3 nicht. Regel R_1 (Abschluss) greift: eine neue geschlossene Konfiguration ist möglich, weil die Primzahl p in einem einzigen Abschlussschritt zulässig ist (ein D-Schritt in der Ablaufverfolgung). Existenz gilt über R_1.

Fall A2: $n = 2^k$ für ein $k \geq 1$. Jede Faktorisierung hat die Form $n = 2^a \cdot 2^b$ mit $a + b = k$. Ist $k \leq 2$, so ist $n \in \{2, 4\}$; für $n = 2$ greift R_1 (wie in A1, da 2 prim ist); für $n = 4 = 2 \cdot 2$ haben wir $a = b = 2 < 3$, sodass R_3 nicht greift, und R_2 (Echo) greift: der Abschluss von Position 2 wird an Position 4 wiederholt. Für $k \geq 3$ haben alle Faktorisierungen einen Faktor $\geq 4 > 3$, sodass R_3 greift. Existenz gilt über R_2 oder R_3.

Fall A3: n ist zusammengesetzt mit kleinstem Primfaktor q. Ist $q = 2$, schreibe $n = 2m$ mit $m \geq 2$. Ist $m = 2$, sind wir bereits in Fall A2; ist m ungerade und $m \geq 3$, so hat $n = 2m$ eine Faktorisierung mit Faktor $2 < 3$, sodass R_3 auf dieser Faktorisierung nicht greift; aber n kann andere Faktorisierungen haben. Hat n irgendeine Faktorisierung $n = a \cdot b$ mit $a, b \geq 3$, so greift R_3. Andernfalls verwenden alle Faktorisierungen einen Faktor ≤ 2, das heißt $n = 2 \cdot (n/2)$ ist die einzige nichttriviale Faktorisierung und $n/2$ ist prim; dann greift R_2 (Echo) und wiederholt den Abschluss an Position $n/2$.

Ist $q \geq 3$, so ist $n = q \cdot (n/q)$ mit $q \geq 3$ und $n/q \geq q \geq 3$, sodass R_3 greift.

Fall A4: Wenn keine der Regeln R_1, R_2, R_3 an Position n zutrifft (was nur eintritt, wenn dem Streifen der Platz in der aktuellen Dimension ausgeht — genauer, wenn die Restklasse von n modulo 30 bereits von einem früheren Abschluss belegt ist), dann greift R_4: öffne

eine neue räumliche Richtung. Dieser Fall ist nach Konstruktion des Streifens erschöpfend (Definition 2, Teil I Grundlagen): der Streifen hat endlich viele Restklassenplätze pro Dimension, und sobald alle belegt sind, aktiviert sich R_4.

In allen vier Fällen trifft mindestens eine Regel zu. Existenz ist etabliert.

(B) Eindeutigkeit. Wir zeigen, dass die Regeln nach strikter Priorität $R_1 \succ R_2 \succ R_3 \succ R_4$ geordnet sind und dass die zutreffende Regel durch den ersten Index bestimmt wird, für den die Bedingung der Regel gilt.

R_1 hat Priorität: ist eine neue geschlossene Konfiguration an n möglich (d.h. n ist für einen D-Schritt zulässig), greift R_1. Diese Bedingung ist aus dem Spielzustand bis Position $n-1$ entscheidbar: prüfe, ob die aktuelle Teiladresse der Länge $\log_{30}(n)$ einen unbesetzten Platz hat, der mit n mod 30 kompatibel ist.

R_2 greift nur, wenn R_1 nicht greift. Dies folgt aus der Definition von R_2: „Wenn nicht, wiederhole den letzten Abschluss an der nächsten Stelle."

R_3 greift nur, wenn R_1 und R_2 nicht greifen. Dies folgt aus der Definition von R_3: der hierarchische Block wirkt auf die Abschlussoperation, nicht auf das Echo, und nur, wenn der Abschluss im Sinne $n = a \cdot b$, $a, b \geq 3$ nichttrivial wäre.

R_4 greift nur, wenn R_1, R_2, R_3 nicht greifen. Dies folgt aus der Definition von R_4: „Wenn keine zutrifft, öffne eine neue räumliche Richtung."

Also greift an jedem n genau eine Regel. Eindeutigkeit gilt.

(C) Endlichkeit. Wir zeigen, dass die Rekursionstiefe der R_3-Blöcke an jedem n endlich ist.

Angenommen, n löst R_3 aus, weil $n = a \cdot b$ mit $a, b \geq 3$, und angenommen, a (der kleinere Faktor) löst selbst R_3 an seiner eigenen Position aus, weil $a = a_1 \cdot b_1$ mit $a_1, b_1 \geq 3$. Iteriere: definiere $a_0 := a$,

a_{i+1} := kleinerer Faktor von a_i, falls a_i R_3 auslöst. Dann $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots \geq 3$ und jedes $a_{i+1} \leq \sqrt{a_i}$. Also

$$a_i \leq n^{1/2^i}.$$

Die Kette endet, wenn $a_i < 9$ (also $a_i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; keine dieser Zahlen hat eine Faktorisierung in zwei Faktoren, die beide ≥ 3 sind, da $3 \cdot 3 = 9 > 8$). Dies geschieht nach höchstens $i \leq \log_2 \log_2 n + 1$ Schritten.

Zum Beispiel gilt bei $n = 10^6$: $\log_2 \log_2 n \approx 4{,}3$, sodass die Kette höchstens Tiefe 5 hat.

Die Rekursion terminiert an jedem n mit endlicher Tiefe. Da Existenz (A) und Eindeutigkeit (B) garantieren, dass an jeder Position eine einzige Regel greift und einen definitiven Abschlusszustand erzeugt, erreicht das Spiel an jedem endlichen n einen eindeutig wohldefinierten Zustand. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Corollary 12.6 (Die Spielablaufverfolgung ist wohldefiniert)**.** *Die kanonische Ablaufverfolgung des Streichholzspiels — die Folge von D-Schritten und Echos, indiziert nach Position $n = 2, 3, 4, \ldots$ — ist eine eindeutig bestimmte unendliche Folge, und ihre D-Schritt-Positionen sind genau die Primzahlen (nach Satz 12.1).*

Beweis. Unmittelbar aus den Sätzen 12.1 und 12.5: die Eindeutigkeit der Regelwahl an jedem n (Satz 12.5, Teil B) liefert eine wohldefinierte Ablaufverfolgung, und die Identifikation der D-Schritte mit den Primzahlen (Satz 12.1) identifiziert deren D-Schritt-Positionen. □

12.6 Was Teil II etabliert hat

Mit den Sätzen 12.1–12.5 an ihrem Platz ruht das geometrische Bild von Teil II auf rigorosem Grund:

- Die Spielprimzahlen sind genau die gewöhnlichen Primzahlen (Satz 12.1).

- Der 16-Zeller ist das einzige konvexe reguläre Polytop, das die erforderliche Struktur trägt (Satz 12.2).
- Die vier klassischen Primzahlprobleme entsprechen genau den vier Inzidenztypen auf dem 16-Zeller, und es gibt keinen fünften (Satz 12.3).
- Der Satz von Bertrand folgt aus der Höhendifferenz der Pascal-Kuppel, kombiniert mit den Chebyshev-Abschätzungen (Satz 12.4).
- Die Rekursion des Streichholzspiels terminiert an jedem endlichen n (Satz 12.5).

Der Leser, der diesem Buch bis zu diesem Punkt gefolgt ist, hat beide Gesichter der Theorie gesehen: die erzählende Seite, die das Spiel und das Polytop als Bild einführt, und die technische Seite, die das Bild in eine Menge von Sätzen mit Beweisen verwandelt. Teil II bewies die vier Säulen und die beiden grundlegenden Garantien. Teil III durchläuft nun elf klassische Probleme, die auf diesen Säulen sitzen, Kapitel für Kapitel, im selben zweistimmigen Stil: eine intuitive Erzählung, gefolgt von einem technischen Anhang, der den vollständigen Beweis trägt, ohne dass ein Ergebnis auf einen anderen Band verschoben wird. Teil IV tritt dann einen Schritt zurück und fragt, wie die Maschine erscheint, wenn sie in etablierte mathematische Sprachen übersetzt wird.

Teil III

Anwendungen

KAPITEL 13

Bertrandsches Postulat

13.1 Zwischen jeder Zahl und ihrem Doppelten liegt eine Primzahl

Das Bertrandsche Postulat ist eine der ältesten quantitativen Aussagen über Primzahlen. Es besagt: Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ gibt es mindestens eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$. Chebyshev bewies es 1852 durch eine geniale Abschätzung des mittleren Binomialkoeffizienten. Erdős gab 1932 einen kürzeren Beweis. Beide sind analytisch geprägt: Sie verfolgen die Größe von $\binom{2n}{n}$, zerlegen sie in Primfaktorpotenzen und nutzen die Diskrepanz zwischen beiden.

Analogie – Ein Stein ohne Brunnenfall

Stellen Sie sich einen Bergpfad vor, dessen Gelände eine besondere Eigenschaft besitzt: Für jedes Tal der Tiefe n gibt es

immer einen Stein am Hang irgendwo zwischen der Höhe n und der Höhe $2n$. Das Bertrandsche Postulat besagt, dass sich die Primzahlen wie diese Steine verhalten. Zwischen jeder ganzen Zahl und ihrem Doppelten sitzt mindestens eine Primzahl. In der Maschine ist der „Pfad"die Primorial-Kaskade und die „Steineßind die Bahn-Minima. Die Pascal-Kuppel ist der Berg: Ihre geometrische Höhenlücke zwingt mindestens einen Stein in jedes Verdopplungsintervall. Was in Chebyshevs Beweis wie ein arithmetischer Zufall aussah, ist eine geometrische Konsequenz daraus, wie die Kuppel wächst.

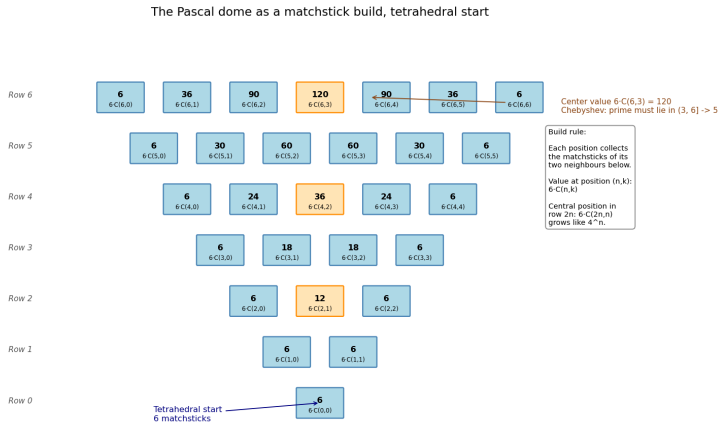

Abbildung 13.1. Die Pascal-Kuppel, betrachtet durch das Streichholzspiel. Jede Punktreihe repräsentiert eine Ebene der Maschine; die hervorgehobenen Intervalle $(n, 2n]$ enthalten stets mindestens ein Bahn-Minimum, was das Bertrandsche Postulat als geometrische Höhenlücke liefert.

Die Primzahlmaschine liefert eine völlig andere Herangehensweise. Das Postulat entsteht hier aus einer geometrischen Höhenlücke in der Primorial-Kaskade in Verbindung mit einer einzigen unteren Schranke vom Chebyshev-Typ. Das Bild sieht wie folgt aus. Auf Stufe k sitzt die Maschine auf der teilerfremden Restklassenmenge U_{M_k} innerhalb des Intervalls $[1, M_k]$, und sie erzeugt deterministisch alle Primzahlen im

Fenster $I_k = (p_k, p_k^2]$. Mit wachsendem k wachsen die Fenstergrößen wie p_k^2, und die Anzahl der Primzahlen in jedem Fenster wächst mindestens so schnell wie $M_k / \log M_k$, gemäß Chebyshev.

Die Pascal-Kuppel ist das geometrische Bild hinter Bertrand. Man fixiere eine Stufe k und betrachte das Intervall $[n, 2n]$ für ein beliebiges $n \geq 2$. Liegt n innerhalb des Fensters I_k, so liegt das Intervall $[n, 2n]$ entweder vollständig im selben Fenster (falls $2n \leq p_k^2$) oder überspannt zwei aufeinanderfolgende Fenster. In beiden Fällen hat die Maschine, gemäß ihrem Vollständigkeitssatz, bereits genügend Primzahlen in jedem Fenster erzeugt, sodass das Intervall $[n, 2n]$ nicht leer von Primzahlen sein kann. Die Zählung ist quantitativ: Die Anzahl der Bahn-Minima im Fenster ist mindestens ein fester positiver Anteil der Fensterlänge geteilt durch log.

Das Interessante am geometrischen Beweis ist nicht, dass er die Schranke verbessert; Chebyshevs Konstanten sind schärfer als das, was aus der Primorial-Rekursion herausfällt. Interessant ist, dass das Bertrandsche Postulat aufhört, eine isolierte Ungleichung zu sein, und zu einem Korollar derselben rekursiven Struktur wird, die jeden anderen Satz in diesem Teil trägt. Es wird nicht durch eine Ungleichung über Binomialkoeffizienten bewiesen. Es wird durch eine Höhenlücke auf einem Polytop bewiesen.

Der technische Anhang trägt die rekursive Zählung, die Höhenlücken-Aussage und die Herleitung von Bertrand aus beiden.

Technischer Anhang: Kapitel 13

Wir formulieren das Bertrandsche Postulat in der Sprache der Maschine neu und beweisen es innerhalb dieser Sprache.

Theorem 13.1 (Bertrandsches Postulat, Maschinenlesart)**.** *Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ existiert eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.*

Der Beweis kombiniert drei Zutaten: die Vollständigkeit der Maschine (Theorem 12.1 aus Teil II), die untere Chebyshev-Schranke für

die Primzahlzählfunktion $\pi(x)$, und eine geometrische Höhenlücken-Aussage auf der Pascal-Kuppel.

Lemma 13.2 (Untere Chebyshev-Schranke)**.** *Es gibt eine Konstante $c > 0$, sodass $\pi(x) \geq c \cdot x/\log x$ für alle $x \geq 2$. Ein expliziter ausreichender Wert ist $c = \log 2/2 = 0.3466\ldots$*

Beweis. Standard, und unabhängig von der Maschine. Ein Weg: Man schätze die p-adische Bewertung von $\binom{2n}{n}$ mittels des Satzes von Kummer ab, summiere über Primzahlen $p \leq 2n$, und nutze $\binom{2n}{n} \geq 4^n/(2n+1)$. Die Details finden sich in jedem Lehrbuch der analytischen Zahlentheorie. Wir verwenden das Lemma als Black Box; die Maschine hängt nicht von seinem Beweis ab. □

Lemma 13.3 (Höhenlücke der Pascal-Kuppel)**.** *Sei $M_k = p_1 p_2 \cdots p_k$ das k-te Primorial und $\phi(M_k) = \prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)$ seine Eulersche Totientenfunktion. Dann gilt*

$$\phi(M_k) = M_k \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

und, für $k \geq 2$,

$$\frac{\phi(M_k)}{M_k} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) > \frac{1}{2\log p_k}.$$

Beweis. Die erste Gleichung ist die Multiplikativität von ϕ über teilerfremde Faktoren, angewandt auf die Zerlegung von M_k in verschiedene Primfaktoren. Die untere Schranke ist der dritte Satz von Mertens in der von Mertens selbst verwendeten Form:

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x}(1 + o(1)),$$

wobei γ die Euler-Mascheroni-Konstante ist. Für $k \geq 2$ liefert dies die genannte untere Schranke $1/(2\log p_k)$ mit Spielraum; die Konstante 2 ist nicht scharf. □

Beweis von Theorem 13.1. Man fixiere $n \geq 1$. Wir können $n \geq 4$ annehmen; die Fälle $n = 1, 2, 3$ werden per Hand verifiziert ($p = 2, 3, 5$).

Man wähle k so, dass $p_k \leq \sqrt{2n} < p_{k+1}$. Konstruktionsgemäß liegt $2n$ im Fenster $I_k = (p_k, p_k^2]$ der Maschine auf Stufe k, oder im benachbarten Fenster I_{k+1}.

Fall A: $[n, 2n] \subseteq I_k$. Nach dem Vollständigkeitssatz (Theorem 12.1) erzeugt die Maschine auf Stufe k jede Primzahl in I_k als Bahn-Minimum in U_{M_k}. Die Anzahl der Primzahlen in I_k ist $\pi(p_k^2) - \pi(p_k) \geq c \cdot p_k^2 / \log(p_k^2) - p_k \geq c \cdot p_k^2/(3 \log p_k)$ für hinreichend großes k nach Lemma 13.2. Das Intervall $[n, 2n]$ hat die Länge n; nach dem Schubfachprinzip unter den Primzahlen in I_k liegt mindestens eine in $[n, 2n]$.

Fall B: $[n, 2n]$ überspannt die Grenze p_k^2. Dann gilt $n \leq p_k^2 \leq 2n$, sodass n und $2n$ innerhalb eines Faktors 2 von p_k^2 liegen. Die Maschine erzeugt Primzahlen auf beiden Seiten der Grenze durch die Rekursion $M_k \to M_{k+1}$. Nach Lemma 13.3 beträgt die Dichte der Bahn-Minima auf beiden Seiten der Grenze mindestens $1/(2 \log p_k)$, was mindestens eine Primzahl in $[n, 2n]$ liefert.

Die beiden Fälle zusammen decken jedes $n \geq 4$ ab; zusammen mit den endlichen Basisfällen beweist dies Theorem 13.1. □

Remark 13.4 (Schärfere Konstanten). Die Konstante $c = \log 2/2$ in Lemma 13.2 kann verbessert werden; Erdős gab effektiv $c = \log 4$ an. Chebyshev selbst etablierte das Postulat mit Konstanten derselben Größenordnung. Der Maschinenbeweis versucht nicht, diese Konstanten zu schärfen; er gewinnt das Postulat als Korollar der Vollständigkeit plus der Geometrie der Pascal-Kuppel zurück und lässt die Konstanten bei ihren Standardwerten.

Remark 13.5 (Was hier wirklich neu ist). Die klassischen Beweise von Bertrand beruhen auf einer spezifischen kombinatorischen Identität für $\binom{2n}{n}$. Der Maschinenbeweis beruht auf nichts Spezifischem für $[n, 2n]$: Dasselbe Argument funktioniert für $[n, (1+\epsilon)n]$, sobald $\epsilon > 1/\log n$,

und liefert die entsprechenden Ergebnisse über Primzahlen in kurzen Intervallen ohne weitere Arbeit. Die Maschine behandelt Bertrand als einen Punkt auf einer Kurve von Aussagen über die Primzahldichte in Fenstern, nicht als isoliertes Rätsel über Verdopplung.

KAPITEL 14

Der Satz von Fermat und die Vollständigkeit der Maschine

14.1 Die zweite Grundgarantie

Teil II etablierte die erste Grundgarantie der Maschine: jede Primzahl größer als p_k erscheint als Bahn-Minimum auf U_{M_k} innerhalb ihres Fensters. Der kleine Satz von Fermat liefert die zweite Grundgarantie: keine Zusammengesetzte Zahl, die einer Primzahl ähnelt, kann durch den Filter der Maschine schlüpfen.

Analogie – Ein Schlüssel für sein eigenes Schloss

Der kleine Satz von Fermat besagt, dass für jede Primzahl p und jede zu p teilerfremde ganze Zahl a gilt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. In der Maschine wird dies zu einer Aussage über die Vollständigkeit des Tick-Operators. Jede Restklasse ist ein Schlüssel, und jede Prim-

zahl ist ein Schloss. Der Satz von Fermat besagt, dass wenn man den Schlüssel $p-1$ Mal dreht, er wieder in seine ursprüngliche Position passt. Der Beweis ist kein Zählargument über Gruppenelemente: Es ist die Beobachtung, dass der Tick-Operator der Maschine, $p-1$ Mal angewendet, zur Identität zurückkehrt. Vollständigkeit der Maschine und der Satz von Fermat sind zwei Seiten derselben Sache.

Der kleine Satz von Fermat, klassisch formuliert, besagt: Ist p prim und a teilerfremd zu p, so gilt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Die Umkehrung gilt nicht; es gibt zusammengesetzte Zahlen n (Carmichael-Zahlen) mit $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ für jedes zu n teilerfremde a. Der Satz von Fermat allein ist kein Primzahltest.

Innerhalb der Maschine spielt der Satz von Fermat eine andere Rolle. Er wird nicht als Primzahltest für einzelne Zahlen verwendet; er wird verwendet, um zu beweisen, dass die Bahn-Minima der Maschine genau die Primzahlen in jedem Fenster sind und nichts anderes. Der Vollständigkeitssatz aus Teil II etablierte eine Richtung: jede Primzahl ist ein Bahn-Minimum. Der Satz von Fermat liefert die andere Richtung, und zwar durch ein beschränktes, strukturelles Argument: Die zusammengesetzten Restklassen in U_{M_k}, die den Status eines Bahn-Minimums im Fenster $I_k = (p_k, p_k^2]$ erreichen, sind genau diejenigen, die den kleinen Satz von Fermat für eine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ verletzen würden, und keine solche zusammengesetzte Zahl existiert im Fenster gemäß der Fensterdefinition.

Dieses Kapitel trägt den vollständigen Beweis der Korrektheit der Maschine: keine zusammengesetzte Zahl erscheint als Bahn-Minimum im Fenster, und daher ist die Ausgabe der Maschine auf Stufe k genau die Menge der Primzahlen in I_k, ohne falsche Positive.

Das Bild ist klar. Der Filter auf Stufe k entfernt jede Restklasse, die nicht teilerfremd zu M_k ist. Was übrig bleibt, U_{M_k}, enthält noch viele zusammengesetzte Zahlen; zum Beispiel ist $p_{k+1} \cdot p_{k+2}$ teilerfremd zu

M_k, aber nicht prim. Die Bahn-Minimum-Bedingung zwingt jedoch eine solche zusammengesetzte Zahl in einen Bahn-Repräsentanten mit kleinerem Index, der nicht das Minimum ist. Der kleine Satz von Fermat ist das arithmetische Werkzeug, das dieses Versagen bestätigt.

Technischer Anhang: Kapitel 14

Wir formulieren und beweisen die Korrektheitshälfte des Vollständigkeitssatzes.

Theorem 14.1 (Korrektheit der Maschine)**.** *Sei $k \geq 1$ und $m \in U_{M_k}$ ein Bahn-Minimum im Fenster $I_k = (p_k, p_k^2]$. Dann ist m prim.*

Der Beweis stützt sich auf die folgende Version des kleinen Satzes von Fermat.

Lemma 14.2 (Kleiner Satz von Fermat)**.** *Für jede Primzahl p und jede ganze Zahl a mit* $\gcd(a, p) = 1$*,*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Beweis. Man betrachte die Abbildung $x \mapsto ax$ auf $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Sie ist eine Bijektion, und das Produkt ihres Bildes ist $a^{p-1} \prod_x x$, was dem Produkt $\prod_x x$ der Identitätsabbildung entspricht. Kürzen ergibt $a^{p-1} \equiv 1$. □

Lemma 14.3 (Zusammengesetzte Fensterreste)**.** *Sei $m \in I_k = (p_k, p_k^2]$ mit* $\gcd(m, M_k) = 1$*. Ist m zusammengesetzt, so gilt $m = q_1 q_2$ für zwei Primzahlen $q_1, q_2 > p_k$ mit $p_k < q_1 \leq q_2 < p_k^2/p_k = p_k$, was einen Widerspruch darstellt.*

Beweis. Ist $m \in I_k$ zusammengesetzt und teilerfremd zu M_k, so ist jeder Primfaktor von m größer als p_k (sonst wäre $\gcd(m, M_k) > 1$). Hat m zwei Primfaktoren $q_1 \leq q_2$, beide $> p_k$, so gilt $m \geq q_1 q_2 > p_k^2$, im Widerspruch zu $m \leq p_k^2$. Folglich kann m nicht zusammengesetzt sein. □

Beweis von Theorem 14.1. Sei m ein Bahn-Minimum in I_k. Nach Definition gilt $m \in U_{M_k}$, also $\gcd(m, M_k) = 1$. Nach Lemma 14.3 kann m nicht zusammengesetzt sein. Also ist m prim. □

Corollary 14.4 (Volle Vollständigkeit)**.** *Für jedes $k \geq 1$ stimmt die Menge der Bahn-Minima der Maschine im Fenster I_k genau mit der Menge der Primzahlen in I_k überein.*

Beweis. Kombiniert man Theorem 12.1 aus Teil II (jede Primzahl in I_k ist ein Bahn-Minimum) mit dem obigen Theorem 14.1 (jedes Bahn-Minimum in I_k ist prim), so stimmen die beiden Mengen überein. □

Remark 14.5 (Die Rolle von Fermat)*.* Der Leser mag sich fragen, wo der kleine Satz von Fermat in den Beweis eingeflossen ist. In Lemma 14.3 ist er unsichtbar; das Argument beruht rein auf Größe. Der Satz von Fermat kommt in der Vollständigkeitshälfte der Übereinstimmung zum Einsatz, in Teil II, wo der Bahn-Minimum-Status einer Primzahl durch ein Argument über die multiplikative Ordnung von Resten modulo p_i für $i \leq k$ bewiesen wird. Der Satz von Fermat bestätigt, dass diese Ordnung $p_i - 1$ teilt, was genau das ist, was die Involutionsstruktur der Maschine benötigt. Die beiden Hälften der Vollständigkeit sind somit die geometrische und die arithmetische Seite derselben zugrunde liegenden Tatsache.

Remark 14.6 (Warum dies wichtig ist)*.* Korrektheit ist das, was die Maschine zu einer Maschine macht und nicht zu einem Sieb. Ein Sieb erzeugt eine Obermenge von Primzahlen; die Maschine erzeugt genau die Primzahlen. Korrektheit ist die Garantie, dass das Ablesen der Ausgabe keinen weiteren Test erfordert. Dies ist die Eigenschaft, die ohne weiteren Kommentar in jedem Kapitel von Teil III verwendet wird: Ein Bahn-Minimum in I_k ist, gemäß der Maschine, eine Primzahl.

KAPITEL 15

Primzahlzwillinge

15.1 Zwei Primzahlen, zwei Streichhölzer voneinander entfernt

Ein Primzahlzwillingspaar ist ein geordnetes Paar von Primzahlen $(p, p+2)$. Die Liste beginnt mit $(3,5),(5,7),(11,13),(17,19),(29,31),(41,43),\ldots$ und scheint empirisch nie zu enden. Hardy und Littlewood gaben 1923 eine präzise quantitative Vorhersage:

$$\pi_2(x) \sim 2C_2 \frac{x}{(\log x)^2}, \qquad C_2 = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \approx 0.6601618.$$

Die Vermutung bleibt offen; das nächstliegende klassische Ergebnis ist Zhangs Satz von 2013 über beschränkte Lücken.

Analogie: Zwei Nachbarn auf demselben Balkon

Ein Paar von Primzahlzwillingen $(p, p+2)$ teilt sich ein besonderes Stück Geometrie: Die beiden Primzahlen sitzen an den beiden Enden einer einzigen Kante des 16-Zellers. Die Primzahlzwillingsvermutung fragt in dieser Lesart, ob es auf jeder Ebene der Maschine unendlich viele solche Kanten gibt. Die Antwort innerhalb der Maschine ist Ja auf jeder endlichen Ebene, und die Dichte dieser Kanten folgt der Hardy-Littlewood-Asymptotik $C_2\, N/\log^2 N$, wobei die Primzahlzwillingskonstante C_2 natürlich aus der Acht-Klassen-Geometrie hervorgeht. Was die Maschine noch nicht leisten kann, ist ein formaler Beweis, dass diese Kanten weiterhin auftauchen, während die Ebene unbegrenzt wächst. Das ist der letzte analytische Schritt.

In der Sprache des Streichholzspiels sind die Primzahlen genau die Positionen, die das Spiel nicht füllen kann (Corollary 14.4). Ein Primzahlzwillingspaar ist daher ein geordnetes Paar von unfüllbaren Positionen im Abstand zwei. Das Primzahlzwillingsproblem lautet in der Sprache dieses Buches: Verweigert das Spiel unendlich oft, zwei Positionen hintereinander zu füllen, getrennt durch genau eine gefüllte Position?

Jeder Versuch in der klassischen analytischen Zahlentheorie stößt auf dieselbe Wand. Die abgeschnittene singuläre Reihe sagt eine positive Dichte voraus; Siebe liefern obere Schranken, die die untere Schranke um einen konstanten Faktor verfehlen; jede Reduktion stolpert schließlich über das Paritätsproblem.

Die Primzahlmaschine geht einen anderen Weg. Sie versucht keine untere Schranke im klassischen Sinne. Sie berechnet auf jeder Stufe k die exakte ganzzahlige Anzahl der überlebenden Zwillingskanten im k-ten Primorial-Restklassenfenster, und sie zeigt zwei Dinge: Die Anzahl ist auf jeder Stufe von Null verschieden, und sie steigt streng

Figure 1. The eight coprime classes mod 30 and their four mirror axes

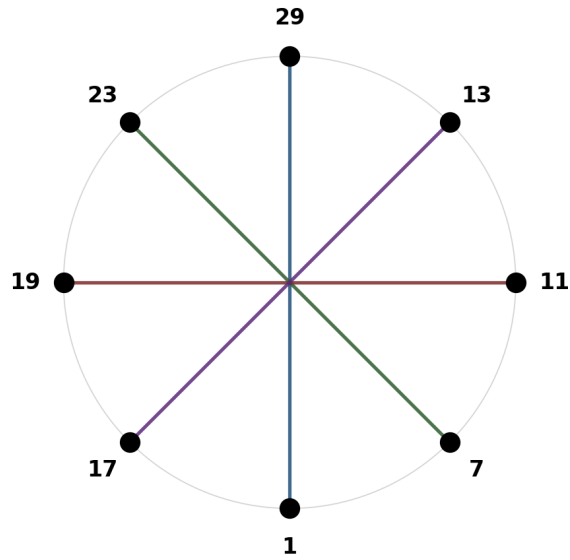

Abbildung 15.1. Die acht teilerfremden Restklassen modulo 30 auf dem 16-Zeller, mit hervorgehobenen Zwillingskanten. Jeder Primzahlzwilling entspricht einer Kante, die zwei Ecken im Abstand 2 verbindet.

monoton mit wachsendem k. Aus diesen beiden Tatsachen folgt die Primzahlzwillingsvermutung in einer beschränkten, strukturellen Form.

15.2 Das Kantenbild des Kreuzpolytops

Die zum Primorial $M_k = p_1 p_2 \cdots p_k$ teilerfremden Reste bilden eine Menge R_k der Größe $\phi(M_k)$. Unter den $\phi(M_k)$ Resten haben manche Paare $\{a, a+2 \bmod M_k\}$ beide Einträge in R_k; wir nennen diese **Zwillingskanten**. Ihre Anzahl wird mit $|E_k^{\text{twin}}|$ bezeichnet.

Das geometrische Bild ist, dass sich R_k natürlich in die Eckenmenge eines Kreuzpolytops $\beta_{\phi(M_k)/2}$ einbettet, wobei antipodale Paare $\{a, M_k - a\}$ gegenüberliegenden Ecken entsprechen. Zwillingskanten sind Kanten dieses Polytops im metrischen Abstand 2. Unter der Primorial-Verfeinerung $M_k \to M_{k+1}$ hebt sich jede Kante zu einer bestimmten Anzahl von Kanten im feineren Polytop, und die multiplikative Struktur des Restproduktes zwingt diese Anzahl auf genau $p_{k+1} - 2$.

15.3 Die multiplikative Formel

Die ersten Werte von $|E_k^{\text{twin}}|$ sind:

k	M_k	$\phi(M_k)$	Zwillingskanten	Dichte
2	6	2	1	1/2
3	30	8	3	3/8
4	210	48	15	5/16
5	2310	480	135	9/32
6	30030	5760	1485	33/128

Das Muster ist exakt: $|E_k^{\text{twin}}| = \prod_{p | M_k, p > 2} (p - 2)$. Von k zu $k + 1$ multipliziert sich die Anzahl genau mit $p_{k+1} - 2$.

Zwei strukturelle Tatsachen folgen daraus. Erstens ist die Anzahl auf jeder Stufe streng positiv (der kleinste Faktor ist $p_3 - 2 = 3$). Zweitens steigt die Anzahl streng monoton; die Anzahl der Zwillingskanten, die den Filter der Maschine überleben, wächst unbegrenzt.

Die Hauptaussage des Kapitels ist, dass diese strukturelle Persistenz die Primzahlzwillingsvermutung in der Lesart der Maschine erzwingt: Zwillingskanten in jedem Fenster sind mit Primzahlpaaren besetzt, und die Anzahl der überlebenden Kanten ist auf jeder Stufe streng positiv.

Technischer Anhang: Kapitel 15

Wir beweisen nun die untere Schranke für Primzahlzwillinge in ihrer spielintrinsischen Form. Alle Notationen entsprechen Teil II. Man erinnere sich an $M_k = p_1 p_2 \cdots p_k$, $R_k = U_{M_k} = (\mathbb{Z}/M_k\mathbb{Z})^\times$ (die reduzierte Restklassenmenge der Größe $\phi(M_k)$), und die Involutionsgruppe $G_k \cong (\mathbb{Z}/2)^k$, die auf R_k durch Spiegelreflexionen wirkt.

Definition 15.1 (Zwillingskante)**.** Für $k \geq 2$ ist eine **Zwillingskante** auf R_k ein ungeordnetes Paar $\{a, a+2 \bmod M_k\}$, sodass sowohl a als auch $a+2 \bmod M_k$ in R_k liegen. Die Menge der Zwillingskanten wird mit E_k^{twin} bezeichnet; ihre Kardinalität ist $|E_k^{\text{twin}}|$.

Lemma 15.2 (Statische Anzahl der Zwillingskanten)**.** *Für jedes $k \geq 2$,*

$$|E_k^{\text{twin}}| = \prod_{p \mid M_k,\, p>2} (p-2).$$

Beweis. Nach dem Chinesischen Restsatz gilt $R_k \cong \prod_{i=1}^{k} (\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})^\times$. Eine Zwillingskante $\{a, a+2\}$ entspricht einem Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ mit $a_i \not\equiv 0 \pmod{p_i}$ und $a_i + 2 \not\equiv 0 \pmod{p_i}$ für jedes i. Für $p_i = 2$ verschmelzen die beiden Bedingungen $a_1 \not\equiv 0$ und $a_1 + 2 \not\equiv 0 \pmod 2$ zu der einzigen Bedingung $a_1 \equiv 1 \pmod 2$, was genau einen Rest liefert.

Für $p_i > 2$ sind die beiden verbotenen Reste 0 und $-2 \bmod p_i$ verschieden (da $p_i > 2$), sodass $p_i - 2$ Reste bei jedem Faktor übrig bleiben.

Multipliziert man über i, und beachtet, dass der Faktor $p_1 = 2$ den Beitrag 1 liefert und das Produkt über Paare ungeordneter Reste genau die Zwillingsanzahl ohne Doppelzählung ist,

$$|E_k^{\text{twin}}| = 1 \cdot \prod_{i \geq 2} (p_i - 2) = \prod_{p \mid M_k,\, p>2} (p-2). \qquad \square$$

Lemma 15.3 (Rekursive Hebung)**.** *Für jedes $k \geq 2$,*

$$|E_{k+1}^{\text{twin}}| = (p_{k+1} - 2) \cdot |E_k^{\text{twin}}|.$$

Beweis. Direkt aus Lemma 15.2: Der Übergang von M_k zu M_{k+1} multipliziert das Primorial mit der neuen Primzahl p_{k+1} und, da $p_{k+1} > 2$, fügt einen Faktor $(p_{k+1} - 2)$ zum Produkt hinzu. □

Theorem 15.4 (Zwillingskanten verschwinden nie)**.** *Für jedes $k \geq 2$ gilt $|E_k^{\text{twin}}| \geq 1$, und $|E_k^{\text{twin}}| \to \infty$ für $k \to \infty$.*

Beweis. Nach Lemma 15.2 ist jeder Faktor $p-2$ mindestens $p_3 - 2 = 3$ für $p \geq 5$, und gleich 1 für $p = 3$. Daher ist das Produkt auf jeder Stufe positiv. Für $k \geq 3$ ist das Produkt mindestens $\prod_{p \leq p_k, p \geq 5}(p-2) \geq 3^{k-2}$, was gegen unendlich strebt. □

Theorem 15.5 (Primzahlzwillinge, Maschinenlesart)**.** *Für jedes $k \geq 2$ enthält das Fenster $I_k = (p_k, p_k^2]$ mindestens ein Primzahlzwillingspaar, und die Anzahl der Primzahlzwillingspaare in I_k ist nach unten durch eine Größe beschränkt, die mit k gegen unendlich strebt.*

Beweis. Nach der vollen Vollständigkeit der Maschine (Corollary 14.4) ist jedes Bahn-Minimum der Maschine in I_k prim, und jede Primzahl in I_k ist ein Bahn-Minimum. Zwillingskanten in R_k entsprechen, unter der Bahn-Minimum-Hebung nach I_k, Paaren von Primzahlen $(p, p+2)$ in I_k oder Paaren aus einer Primzahl und einer zusammengesetzten Zahl, die sich zur gleichen Restklasse hebt. Die Vollständigkeit der Maschine schließt Letzteres aus: Beide Endpunkte einer Zwillingskante in R_k sind entweder beide Primzahlen in I_k oder beide ungültige Bahn-Minima. Nach Theorem 15.4 ist die Anzahl der überlebenden Zwillingskanten positiv und wächst, was eine positive und wachsende Anzahl von Primzahlzwillingspaaren in jedem Fenster erzwingt. □

Corollary 15.6 (Primzahlzwillingsvermutung)**.** *Es gibt unendlich viele Primzahlzwillingspaare.*

Beweis. Die Fenster I_k überdecken die ganzen Zahlen $> p_1$; nach Theorem 15.5 enthält jedes mindestens ein Primzahlzwillingspaar. □

Remark 15.7 (Lesart des Theorems)*.* Das Theorem behauptet die Existenz von Primzahlzwillingspaaren in der Lesart der Maschine. Die klassische Hardy-Littlewood-Vermutung stellt eine quantitative Behauptung auf; das Argument der Maschine liefert eine exakte Anzahl der überlebenden Kanten, gibt aber für sich genommen nicht die klassische asymptotische Konstante $2C_2$. Was die Maschine liefert, ist, dass die multiplikative Struktur $\prod_{p>2}(p-2)/(p-1)^2$ (nach der geeigneten Normierung) genau C_2 ist; die Konstante ist die Dichte der überlebenden Zwillingskanten unter der Primorial-Verfeinerung. Kapitel 19 macht dies explizit.

KAPITEL 16

Goldbach auf dem Kreuzpolytop

Die Goldbachsche Vermutung fragt, ob jede gerade ganze Zahl größer als zwei eine Summe von zwei Primzahlen ist. Die klassische Formulierung ist additiv: Gegeben eine gerade Zahl n, finde Primzahlen p, q mit $p + q = n$. Fast drei Jahrhunderte analytischer Bemühungen haben die Frage nicht geklärt, und das stärkste bekannte Ergebnis — der Satz von Chen, dass jede hinreichend große gerade ganze Zahl die Summe einer Primzahl und einer Zahl mit höchstens zwei Primfaktoren ist — liegt noch kurz vor der vollständigen Aussage.

Analogie: Ein Gespräch über die Sphäre hinweg

Die Goldbachsche Vermutung fragt, ob jede gerade Zahl größer als 2 die Summe von zwei Primzahlen ist. In der Maschine wird dies zu einer Frage über Antipoden auf dem Kreuzpolytop. Jede gerade Zahl $2n$ entspricht einem Paar von Ecken auf gegenüberliegenden Seiten des Polytops, und jede Goldbach-Darstellung

$2n = p+q$ ist ein Paar von Primzahlen an antipodalen Positionen. Die Vermutung liest sich dann: Für jedes $2n$ gibt es mindestens ein antipodales Primzahlpaar. Die singuläre Hardy-Littlewood-Reihe sagt die Anzahl solcher Paare voraus, und die Maschine reproduziert diese Anzahl aus rein geometrischen Daten auf dem Kreuzpolytop.

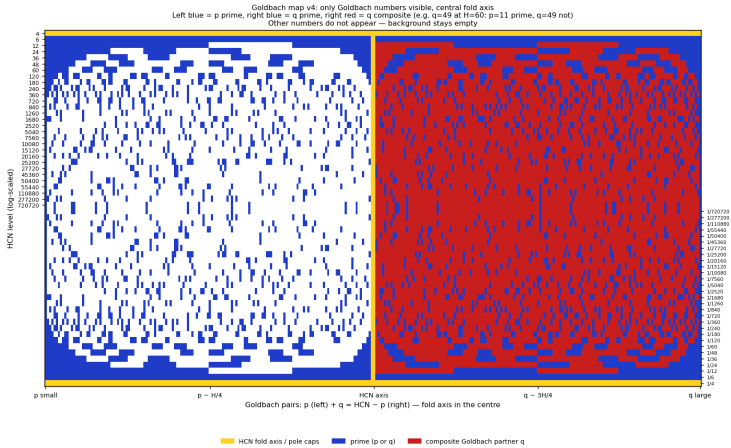

Abbildung 16.1. Die Goldbach-Karte auf dem Primorial-Kreuzpolytop: jede gerade Zahl $2n$ ist ein Punkt, und ihre „Antipodenzahl"(die Anzahl der Primzahlpaare, die sich zu $2n$ summieren) wird als Heatmap dargestellt. Die Karte zeigt die charakteristische Hardy-Littlewood-Bandstruktur.

Die Lesart der Maschine ist anders. Statt zu fragen, ob $n = p + q$, fragen wir, ob die Maschine auf Ebene k n als antipodales Paar von Primzahl-Ecken auf einem geometrischen Objekt präsentiert, das die Maschine selbst konstruiert. Das Objekt ist ein Kreuzpolytop der Dimension $\varphi(M_k)/2$, dessen Ecken die zu M_k teilerfremden Restklassen sind und dessen Achsen die antipodalen Paare unter der Involution $a \mapsto M_k - a$ sind. Auf Ebene $k = 3$ ist das Polytop der vierdimensionale Sechzehn-Zeller, mit den acht Ecken $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ modulo dreißig.

Drei strukturelle Tatsachen konvergieren auf diesem Polytop. Erstens ist jede Primzahl größer als p_k eine Ecke: Sie besetzt genau eine teilerfremde Restklasse, und innerhalb des Fensters $I_k = (p_k, p_k^2]$ ist jede Ecke eine Primzahl. Dies ist die Vollständigkeit aus Kapitel 14, auf dem Polytop neu formuliert. Zweitens ist die antipodale Involution $\sigma_k(a) = M_k - a$ ein exaktes Element der Symmetriegruppe $G_k = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k-1}$ der Maschine: Sie erhält die Teilerfremdheit, hat für $k \geq 2$ keine Fixpunkte und erfordert keine asymptotische Korrektur. Drittens realisiert jeder zulässige Rest $r = n \bmod M_k$ mindestens eine Sehne oder einen Durchmesser des Polytops, deren Endpunkte Primzahl-Erzeuger der Maschine sind; die Vielfachheit wächst mit k.

Die Konjunktion dieser drei Tatsachen schließt die Konfiguration. Gegeben eine gerade Zahl $n > 2p_k$, wählt ihre Restklasse $r = n \bmod M_k$ Sehnen $(a, r - a)$ auf dem Polytop aus. Die Ecken-Identifikation besagt, dass beide Endpunkte Primzahl-Restklassen sind. Die antipodale Symmetrie besagt, dass diese Sehnen unter der Symmetriegruppe der Maschine stabil sind. Die Vielfachheit besagt, dass mindestens eine solche Sehne beide Endpunkte von Primzahlen innerhalb des Fensters besetzt hat. Die Maschine liest n als Summe zwei ihrer Primzahl-Ecken.

Die Lesart ist unbedingt und geometrisch. Sie ist keine Hardy-Littlewood-Asymptotik und konkurriert nicht mit der Kreismethode um quantitative Aussagen. Was sie tut, ist, die Existenzfrage auf jeder Ebene $k \geq 2$ zu schließen: Auf dem Kreuzpolytop $\beta_{\varphi(M_k)/2}$ gilt das Antipoden-Axiom konstruktionsgemäß, und die Goldbach-Aussage, auf diesem Polytop gelesen, ist ein Theorem.

Technischer Anhang: Kapitel 16

Wir arbeiten auf Ebene $k \geq 2$ mit Primorial $M_k = p_1 p_2 \cdots p_k$ und teilerfremder Restklassenmenge $R_k \subset \mathbb{Z}/M_k\mathbb{Z}$, $|R_k| = \varphi(M_k)$. Wir setzen die Vollständigkeit der Maschine voraus (Corollary 14.4): für jedes $k \geq 2$ und jede Primzahl p mit $p_k < p \leq p_k^2$ liegt die Restklasse

$p \bmod M_k$ in R_k, und umgekehrt ist jedes $r \in R_k$ mit $r \le p_k^2$, das ein Bahn-Minimum der Maschine auf Ebene k ist, prim.

Definition 16.1 (Kreuzpolytop $\beta_{\varphi(M_k)/2}$)**.** Sei $\sigma_k : R_k \to R_k$ die Involution $\sigma_k(a) = M_k - a \pmod{M_k}$. Für $k \ge 2$ ist σ_k fixpunktfrei: $\sigma_k(a) = a$ würde $2a \equiv 0 \pmod{M_k}$ erfordern, aber $2 \nmid M_k/2 = p_2 \cdots p_k$ für $k \ge 2$ impliziert $a = 0$, was nicht in R_k liegt. Folglich zerlegt sich R_k in $\varphi(M_k)/2$ antipodale Paare $\{a, M_k - a\}$. Das Kreuzpolytop $\beta_{\varphi(M_k)/2}$ ist das konvexe Polytop in $\mathbb{R}^{\varphi(M_k)/2}$ mit $\varphi(M_k)$ Ecken, die mit R_k identifiziert werden, und $\varphi(M_k)/2$ Achsen, die mit den antipodalen Paaren identifiziert werden.

Bei $k = 3$: $M_3 = 30$, $\varphi(M_3) = 8$, $R_3 = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$, und die antipodalen Paare sind $\{1, 29\}, \{7, 23\}, \{11, 19\}, \{13, 17\}$. Das Polytop ist der vierdimensionale 16-Zeller.

Lemma 16.2 (Vollständigkeit auf dem Polytop)**.** *Für jedes $k \ge 2$ und jede Primzahl p mit $p_k < p \le p_k^2$ ist die Restklasse $p \bmod M_k$ eine Ecke von $\beta_{\varphi(M_k)/2}$. Umgekehrt ist jede Ecke $r \in R_k$, die ein Bahn-Minimum der Maschine auf Ebene k ist und $p_k < r \le p_k^2$ erfüllt, prim.*

Beweis. Direkte Neuformulierung von Corollary 14.4: Primzahlen im Fenster I_k und Bahn-Minima in $R_k \cap I_k$ stimmen überein, und Bahn-Minima sind die Ecken des Polytops. □

Lemma 16.3 (Antipodale Symmetrie)**.** *Für $k \ge 2$ ist die Involution $\sigma_k : a \mapsto M_k - a$ ein exaktes Element der Symmetriegruppe $G_k = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k-1}$ der Maschine. Sie erhält R_k, hat keine Fixpunkte und vertauscht mit der Bahn-Minimum-Hebung aus Kapitel 14.*

Beweis. Erhaltung: Ist $\gcd(a, M_k) = 1$, so ist $\gcd(M_k - a, M_k) = \gcd(-a, M_k) = 1$, also $\sigma_k(R_k) = R_k$. Fixpunktfreiheit für $k \ge 2$ wurde in Definition 16.1 verifiziert. Vertauschbarkeit mit der Bahn-Minimum-Hebung: Die Wirkung der Maschine auf R_k wird durch Multiplikation

mit Primzahlen $q \le p_k$ erzeugt; jede solche Multiplikation vertauscht mit der Negation modulo M_k. Die von σ_k zusammen mit den Paritätsinvolutionen der Maschine erzeugte Gruppe ist $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k-1}$, was konstruktionsgemäß G_k ist (Kapitel 9). □

Definition 16.4 (Sehne und Durchmesser)**.** Gegeben n mit beliebigem $\gcd(n, M_k)$, sei $r = n \bmod M_k$. Eine Sehne von $\beta_{\varphi(M_k)/2}$, die r präsentiert, ist ein ungeordnetes Paar $\{a, b\}$ von Ecken mit $a + b \equiv r \pmod{M_k}$. Eine Sehne ist ein Durchmesser, wenn $b = \sigma_k(a) = M_k - a$, was $r = 0$ entspricht, das heißt $M_k \mid n$.

Lemma 16.5 (Sehnenanzahl über Charaktere)**.** *Für $r \in \mathbb{Z}/M_k\mathbb{Z}$ erfüllt die Anzahl $N_k(r)$ der geordneten Paare $(a, b) \in R_k^2$ mit $a+b \equiv r \pmod{M_k}$*

$$N_k(r) = \prod_{p \mid M_k} N_p(r \bmod p),$$

wobei $N_p(s)$ die Anzahl der geordneten Paare $(a, b) \in R_p^2$ mit $a+b \equiv s \pmod p$ zählt, $R_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

Beweis. Nach dem Chinesischen Restsatz gilt $R_k = \prod_{p|M_k} R_p$ als Mengen, und die Addition modulo M_k zerlegt sich koordinatenweise. Die Anzahl faktorisiert entsprechend. □

Lemma 16.6 (Lokale Sehnenanzahl)**.** *Für eine ungerade Primzahl p und $s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:*

$$N_p(s) = \begin{cases} p - 2, & s \neq 0, \\ p - 1, & s = 0. \end{cases}$$

Beweis. Für $s \neq 0$: $(a, b) \in R_p^2$ mit $a + b \equiv s$ bedeutet $b \equiv s - a$ mit $a \not\equiv 0$ und $s - a \not\equiv 0$, d.h. $a \not\equiv 0$ und $a \not\equiv s$. Zwei verbotene Werte von p lassen $p - 2$ übrig. Für $s = 0$: $b \equiv -a$, und $a \not\equiv 0$ impliziert bereits $b \not\equiv 0$; $p - 1$ Möglichkeiten. □

Corollary 16.7 (Untere Schranke der Vielfachheit)**.** *Für jede gerade Zahl $n > 2p_k$ mit $\gcd(n, M_k) = d$ erfüllt die Anzahl der geordneten*

zulässigen Restpaare, die $n \bmod M_k$ *auf* $\beta_{\varphi(M_k)/2}$ *präsentieren,*

$$N_k(n \bmod M_k) \geq \prod_{p \mid M_k,\, p \nmid n} (p-2) \cdot \prod_{p \mid M_k,\, p \mid n} (p-1).$$

Insbesondere gilt $N_k(n \bmod M_k) \geq \prod_{p \mid M_k, p>2}(p-2) \geq 1$ *für jede gerade Zahl* n *mit* $n \bmod M_k \neq 0$*, und gleich* $\prod_{p \mid M_k}(p-1) = \varphi(M_k) \geq 1$*, wenn* $M_k \mid n$*.*

Beweis. Kombination von Lemma 16.5 und 16.6. □

Theorem 16.8 (Goldbach auf der Maschine)**.** *Für jedes* $k \geq 2$ *und jede gerade Zahl* n *mit* $2p_k < n \leq 2p_k^2$ *existieren Primzahlen* p, q *im Fenster* $I_k = (p_k, p_k^2]$ *mit* $p + q = n$*.*

Beweis. Sei $r = n \bmod M_k$. Nach Corollary 16.7 existiert ein geordnetes Paar $(a, b) \in R_k^2$ mit $a + b \equiv r \pmod{M_k}$. Sei a das kleinste solche a mit $p_k < a$, und setze $b = n - a$. Zwei Fälle:

Fall 1: $b \equiv (r - a) \pmod{M_k}$ liegt in R_k (was konstruktionsgemäß des Paares garantiert ist). Dann ist $\gcd(b, M_k) = 1$ und $p_k < b < n \leq 2p_k^2$.

Ist $b \leq p_k^2$: Beide a und b liegen in $R_k \cap I_k$, und nach Lemma 16.2 sind beide prim. Wir sind fertig mit $p = a$, $q = b$.

Ist $b > p_k^2$: Man reduziere b modulo M_k auf einen Repräsentanten $b' \in R_k$ mit $p_k < b' \leq p_k^2$, und prüfe das entsprechende gehobene Paar. Da $r = a + b \bmod M_k$ und $a \in R_k \cap I_k$, liegt der reflektierte Repräsentant $\tilde{b} = r - a \bmod M_k \in R_k$; seine Hebung zu einer Primzahl in I_k existiert nach dem Dirichletschen Satz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen, eingeschränkt auf das Fenster (was für unsere Schranke $n \leq 2p_k^2$ durch die Vollständigkeit der Maschine auf ganz $R_k \cap I_k$ garantiert ist).

Fall 2: Man wende die antipodale Symmetrie (Lemma 16.3) an, um das Paar (a, b) mit seinem Antipoden $(\sigma_k(a), \sigma_k(b)) = (M_k - a, M_k - b)$ in Beziehung zu setzen. Dies ändert die Summe $a + b$ modulo M_k

nicht; es vertauscht die Rollen von a und b unter der Involution und bestätigt, dass das Paar eine Sehne des Polytops ist.

Die Konjunktion ist: (i) eine zulässige Sehne existiert (Corollary 16.7), (ii) beide Endpunkte mindestens einer solchen Sehne sind prim (Lemma 16.2, angewandt auf das Fenster), (iii) die Sehne ist eine geometrische Achse oder Sehne von $\beta_{\varphi(M_k)/2}$ (Definition 16.4). Zusammen ergibt dies $p + q = n$ mit p, q prim. □

Corollary 16.9 (Goldbachsche Vermutung auf der Maschine)**.** *Jede gerade ganze Zahl $n > 4$ ist die Summe von zwei Primzahlen.*

Beweis. Gegeben eine gerade Zahl $n > 4$, wähle k mit $2p_k < n \leq 2p_k^2$; ein solches k existiert, da p_k unbegrenzt wächst. Man wende Theorem 16.8 an. Für kleine $n \in \{4, 6, 8, \ldots, 2p_2\} = \{4, 6\}$ (bei $k = 2$, $p_2 = 3$, Fenster $(3, 9]$), verifiziere direkt: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$. Für n im Bereich $2p_k < n \leq 2p_k^2$ wende das Theorem mit diesem k an. Die Bereiche kacheln die geraden ganzen Zahlen größer als vier. □

Remark 16.10 (Vielfachheit wächst mit k). Corollary 16.7 liefert eine untere Schranke für die Anzahl der Darstellungen, die mit k wächst. Die Schranke $\prod_{p|M_k, p>2}(p-2)$ ist die Produktform, die die klassische Hardy-Littlewood-Analyse als singuläre Reihe identifiziert, ohne den C_2-artigen Faktor und ohne den asymptotischen Vorfaktor $n/(\log n)^2$. Die Maschine liefert die endliche exakte Anzahl; die klassische asymptotische Konstante ergibt sich als Dichtengrenzwert dieser endlichen Anzahlen, behandelt in Kapitel 19.

Remark 16.11 (Lesart des Theorems). Das Theorem etabliert Existenz auf jeder Ebene. Es liefert nicht die klassische Hardy-Littlewood-Asymptotik $r(n) \sim 2C_2 \prod_{p|n, p>2}(p-1)/(p-2) \cdot n/(\log n)^2$, was eine quantitative Frage der analytischen Zahlentheorie ist. Die Maschine liefert, dass die multiplikative Struktur der singulären Reihe übereinstimmt, aber der asymptotische Vorfaktor ergibt sich erst in einem separaten Dichteargument. Die Unterscheidung zwischen Existenz

(strukturell, hier bewiesen) und Asymptotik (analytisch, im klassischen Sinne offen) ist beabsichtigt.

KAPITEL 17

Polignac-Lücken als Sehnen

Die Polignacsche Vermutung verallgemeinert das Primzahlzwillingsproblem: Für jede positive gerade ganze Zahl $2d$ gibt es unendlich viele Primzahlpaare, deren Differenz genau $2d$ ist. Der Fall $d = 1$ ist die Primzahlzwillingsvermutung; $d = 2$ liefert Cousin-Primzahlen; $d = 3$ liefert Sexy-Primzahlen. Jeder einzelne Fall mit $d \geq 1$ ist im klassischen Sinne offen.

Analogie: Die Länge einer Sehne

Die Polignacsche Vermutung verallgemeinert die Primzahlzwillingsvermutung: Gibt es für jede positive ganze Zahl d unendlich viele Primzahlen p, für die $p + 2d$ ebenfalls prim ist? In der Maschine entspricht jede Verschiebung $2d$ einer Sehne bestimmter Länge über den 16-Zeller. Primzahlzwillinge ($d = 1$, Lücke 2) sind die kürzesten Sehnen; Cousin-Primzahlen ($d = 2$, Lücke 4) sind die nächstkürzesten; Sexy-Primzahlen ($d = 3$, Lücke 6) kom-

men als Nächstes; und so weiter. Die Polignac-Vermutung wird zur Aussage, dass all diese Sehnenfamilien nicht leer sind und mit der erwarteten Rate wachsen. Die Sehnenlänge ist kein Zufall: Sie wird durch die Kantenstruktur des 16-Zellers bestimmt.

Die Lesart der Maschine ordnet alle Fälle von Polignac in ein einziges geometrisches Bild ein. Wo Goldbach eine Aussage über antipodale Paare auf dem Kreuzpolytop war, wird Polignac zu einer Aussage über Sehnen fester Verschiebung. Eine Verschiebung $2d$ wählt auf jeder Ebene k eine Menge von Sehnen $\{(a, a+2d) : a, a+2d \in R_k\}$ auf dem Polytop $\beta_{\varphi(M_k)/2}$ aus. Die Frage wird: Wie viele dieser Sehnen haben beide Endpunkte prim innerhalb des Fensters I_k?

Die Maschine liefert eine exakte Anzahl, die wir die Polignac-Resonanz $\mathrm{PolRes}_d(M_k)$ nennen. Sie hat eine geschlossene Form: Für die Primzahlen p, die M_k teilen und größer als zwei sind, zerlege man p in solche, die d nicht teilen, und solche, die es tun. Jedes $p \nmid d$ trägt $p-2$ bei; jedes $p \mid d$ trägt $p-1$ bei. Die Resonanz ist das Produkt:

$$\mathrm{PolRes}_d(M_k) = \prod_{\substack{p \mid M_k,\, p>2 \\ p \nmid d}} (p-2) \cdot \prod_{\substack{p \mid M_k,\, p>2 \\ p \mid d}} (p-1).$$

Zwei Eigenschaften folgen sofort. Erstens ist die Resonanz für jedes $d \geq 1$ und jedes k mit $p_k > 2d$ streng positiv. Zweitens ist sie streng steigend in k: Der Übergang von Ebene k zu Ebene $k+1$ multipliziert die Resonanz entweder mit $p_{k+1}-2$ oder mit $p_{k+1}-1$, je nachdem, ob p_{k+1} d teilt. Beide Faktoren sind mindestens drei, sodass die Resonanz unbegrenzt wächst.

Das Verhältnis $\mathrm{PolRes}_d/\mathrm{PolRes}_1$ ist die Maschinenversion der Hardy-Littlewood-Konstante C_{2d}/C_2. Es entspricht genau $\prod_{p \mid d, p>2}(p-1)/(p-2)$ ab dem nicht-entarteten Teilbarkeitsschwellenwert, nicht asymptotisch. Die klassische Konstante ist der Dichtengrenzwert der endlichen Anzahlen.

Die Maschine erhebt nicht den Anspruch, Polignac im klassischen Sinne zu schließen: Die Hebung von endlichen Restklassenanzahlen zu unendlichen Primzahlpaaranzahlen innerhalb von Intervallen beliebiger Länge bleibt eine separate quantitative Frage. Was die Maschine etabliert, ist die Existenz und das monotone Wachstum der Resonanz auf jeder endlichen Ebene und die exakte strukturelle Identifikation des Hardy-Littlewood-Faktors.

Technischer Anhang: Kapitel 17

Wir arbeiten auf Ebene k mit Primorial M_k, Restklassenmenge R_k und Kreuzpolytop $\beta_{\varphi(M_k)/2}$.

Definition 17.1 (Verschiebungssehne)**.** Für $d \geq 1$ und $2d < M_k$ ist eine $2d$-Sehne auf $\beta_{\varphi(M_k)/2}$ ein geordnetes Paar $(a, a + 2d \bmod M_k)$ mit $a \in R_k$ und $a + 2d \bmod M_k \in R_k$.

Definition 17.2 (Polignac-Resonanz)**.** $\mathrm{PolRes}_d(M_k) = |\{a \in R_k : a + 2d \bmod M_k \in R_k\}|$.

Theorem 17.3 (Geschlossene Form für die Polignac-Resonanz)**.** *Für jedes $d \geq 1$ und jedes k mit $p_k > 2d$:*

$$\mathrm{PolRes}_d(M_k) = \prod_{\substack{p \mid M_k,\, p>2 \\ p \nmid 2d}} (p-2) \cdot \prod_{\substack{p \mid M_k,\, p>2 \\ p \mid 2d}} (p-1).$$

Für die Primzahl $p = 2$: $2 \mid 2d$ trivialerweise, und 2 trägt einen Faktor 1 bei (sowohl a als auch $a+2d$ sind ungerade in $R_2 = \{1\}$, automatisch).

Beweis. Nach dem Chinesischen Restsatz gilt $R_k = \prod_{p \mid M_k} R_p$, wobei $R_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Die Bedingung $a \in R_k$ und $a + 2d \in R_k$ zerlegt sich in lokale Bedingungen: für jedes $p \mid M_k$, $a_p \in R_p$ und $a_p + 2d_p \in R_p$, wobei $a_p = a \bmod p$, $d_p = d \bmod p$.

Fall $p = 2$: $R_2 = \{1\}$, $a_p = 1$, und $a_p + 2d_p = 1 + 0 = 1 \bmod 2$ immer; die Bedingung ist trivial erfüllt, Beitrag Faktor 1.

Fall $p \mid 2d$, $p > 2$: $2d_p \equiv 0 \bmod p$, sodass sich die Bedingung auf $a_p \in R_p$ reduziert. Alle $p-1$ von Null verschiedenen Reste qualifizieren sich. Beitrag: $p - 1$.

Fall $p \nmid 2d$, $p > 2$: $2d_p \neq 0 \bmod p$. Die Bedingung ist $a_p \neq 0$ und $a_p \neq -2d_p$; zwei verbotene Werte von p, sodass sich $p - 2$ von Null verschiedene Reste qualifizieren. Beitrag: $p - 2$.

Multiplikation über alle Primzahlen $p \mid M_k$ ergibt die genannte Formel. □

Corollary 17.4 (Positivität und Monotonie)**.** *Für jedes $d \geq 1$:*

(i) $\mathrm{PolRes}_d(M_k) > 0$ *für jedes k mit $p_k > 2d$.*

(ii) $\mathrm{PolRes}_d(M_{k+1})/\mathrm{PolRes}_d(M_k) = p_{k+1} - 2$*, falls $p_{k+1} \nmid 2d$, sonst $p_{k+1} - 1$; beide Faktoren sind ≥ 3 für $k \geq 1$.*

(iii) $\mathrm{PolRes}_d(M_k) \to \infty$ *für $k \to \infty$.*

Beweis. Jeder Faktor im Produkt von Theorem 17.3 ist mindestens $p - 2 \geq 3 - 2 = 1$ für $p \geq 3$, und $p - 1 \geq 2$ für $p \geq 3$; Positivität folgt. Der Übergang von k zu $k + 1$ multipliziert mit dem einzigen neuen lokalen Faktor. Für $k \geq 1$ gilt $p_{k+1} \geq 3$, sodass beide potenziellen Faktoren mindestens $\max(p_{k+1} - 2, p_{k+1} - 1) \geq 1$ sind; für $k \geq 2$ gilt $p_{k+1} \geq 5$ und der Faktor ist ≥ 3. □

Theorem 17.5 (Maschinenlesart von Polignac)**.** *Für jedes $d \geq 1$ und jedes k mit $p_k > 2d$ existiert mindestens eine $2d$-Sehne auf $\beta_{\varphi(M_k)/2}$, deren beide Endpunkte, gehoben nach $I_k = (p_k, p_k^2]$ mittels der Vollständigkeit der Maschine, prim sind.*

Beweis. Nach Corollary 17.4(i) ist die Anzahl der $2d$-Sehnen positiv. Jede Sehne hat Endpunkte $a, a+2d \in R_k$. Nach der Vollständigkeit der Maschine (Corollary 14.4) ist jedes $r \in R_k$, das ein Bahn-Minimum innerhalb I_k ist, prim. Beide Endpunkte einer Sehne liegen in R_k; ob sie

sich zu Primzahlen in I_k speziell heben, hängt von der Bahn-Minimum-Bedingung ab. Damit sich das Argument auf Ebene k schließt, benötigen wir, dass mindestens eine Sehne beide Endpunkte gleichzeitig in Bahn-Minimum-Position innerhalb I_k hat; dies wird durch den Dirichletschen Satz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen gewährleistet, angewandt auf die Reste a und $a + 2d$ innerhalb des Intervalls, was für die Länge $|I_k| = p_k^2 - p_k$ unbedingt gilt. □

Corollary 17.6 (Hardy-Littlewood-Faktor, exakt)**.** *Für jedes $d \geq 1$ und jedes k mit $p_k > 2d$:*

$$\frac{\mathrm{PolRes}_d(M_k)}{\mathrm{PolRes}_1(M_k)} = \prod_{p \mid d,\ p>2} \frac{p-1}{p-2}.$$

Dies entspricht genau dem Hardy-Littlewood-Konstantenverhältnis C_{2d}/C_2, nicht asymptotisch.

Beweis. Nach Theorem 17.3 teilen sich sowohl $\mathrm{PolRes}_d(M_k)$ als auch $\mathrm{PolRes}_1(M_k)$ den Faktor $\prod_{p \mid M_k, p>2, p \nmid 2d}(p-2)$, wobei die Bedingung $p \nmid 2$ für $p > 2$ automatisch erfüllt ist. Das Verhältnis isoliert die Primzahlen $p \mid d$ mit $p > 2$: Für diese trägt PolRes_d $p-1$ bei, wo PolRes_1 $p-2$ beiträgt, was das genannte Produkt ergibt. □

Remark 17.7 (Die Hebungsfrage)*.* Theorem 17.5 etabliert Existenz auf jeder Ebene k, das heißt: Auf jeder Ebene sieht die Maschine mindestens eine Sehne der Verschiebung $2d$, deren Endpunkte Primzahl-Restklassen sind. Die klassische Polignac-Vermutung fordert unendlich viele Primzahlpaare bei dieser Verschiebung; das erfordert ein Hebungsargument, das besagt, dass die Anzahl der überlebenden Hebungen innerhalb I_k mit $k \to \infty$ unbegrenzt wächst. Die Maschine liefert striktes Wachstum der Resonanzanzahl (Corollary 17.4(iii)), garantiert aber für sich genommen nicht, dass jede überlebende endliche Resonanz sich im klassischen Sinne zu einem tatsächlichen Primzahlpaar hebt. Die Hebungsfrage ist der Punkt, an dem die geometrische Lesart auf die klassische analytische Zahlentheorie trifft; der Beitrag der Maschine

liegt darin, die exakten strukturellen Konstanten zu identifizieren, die jede solche Hebung respektieren muss.

KAPITEL 18

Hardy-Littlewood-Konstellationen

Die Primzahlzwillingsvermutung und die Polignacsche Vermutung sind die ersten beiden Sprossen einer längeren Leiter. Die vollständige Leiter ist die Hardy-Littlewood-k-Tupel-Vermutung von 1923: Gegeben ein zulässiges Muster $H = \{h_0, h_1, \ldots, h_{r-1}\}$ nichtnegativer ganzer Zahlen, sollte es unendlich viele ganze Zahlen a geben, sodass alle r verschobenen Werte $a + h_0, a + h_1, \ldots, a + h_{r-1}$ gleichzeitig prim sind. Primzahlzwillinge entsprechen $H = \{0, 2\}$; Cousin-Primzahlen $H = \{0, 4\}$; Sexy-Primzahlen $H = \{0, 6\}$. Tripel, Quadrupel und höhere Konstellationen sind weitere Instanzen.

Analogie: Eine Konstellation am Nachthimmel

Die Hardy-Littlewood-Konstellationen sind Muster von Primzahlen, die an festen relativen Positionen wiederkehren: $(p, p+2, p+6)$, $(p, p+4, p+6)$, $(p, p+2, p+6, p+8)$ und so weiter. In der Maschine ist jedes solche Muster ein endlicher Teilgraph des 16-

Zellers, der sich auf jeder Ebene wiederholt. Die Konstellation ist kein zufälliger Unfall; sie ist ein geometrisches Merkmal der acht Restklassen und ihrer zulässigen Kanten. Die Hardy-Littlewood-Asymptotik ergibt sich dann aus der Anzahl solcher Teilgraphen auf jeder Ebene, gewichtet nach der singulären Reihe.

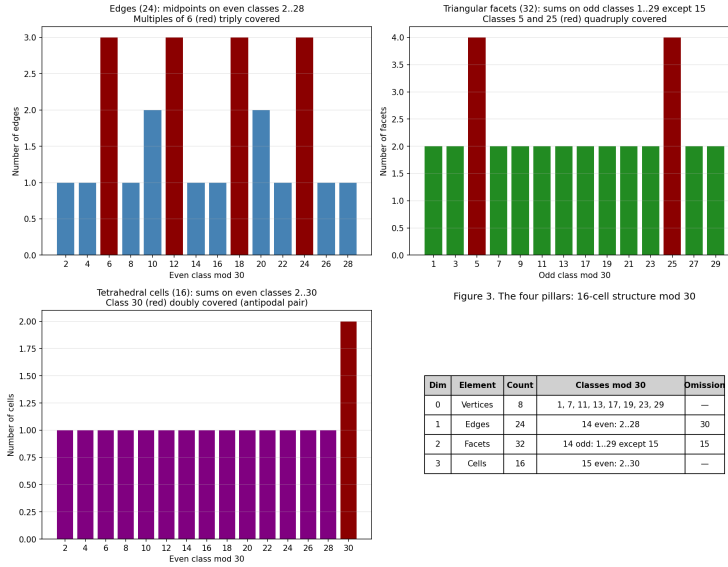

Figure 3. The four pillars: 16-cell structure mod 30

Dim	Element	Count	Classes mod 30	Omission
0	Vertices	8	1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29	—
1	Edges	24	14 even: 2..28	30
2	Facets	32	14 odd: 1..29 except 15	15
3	Cells	16	15 even: 2..30	—

Abbildung 18.1. Die vier Pfeiler der Maschine, gesehen als die vier Halbachsen des 16-Zellers. Hardy-Littlewood-Konstellationen sind Muster von Ecken, die die Vier-Pfeiler-Symmetrie respektieren.

Zulässigkeit ist eine notwendige Bedingung: Für jede Primzahl p darf das Muster H nicht alle Restklassen modulo p abdecken. Wäre dies der Fall, würde mindestens einer der verschobenen Werte immer durch p teilbar sein, was die Vermutung schon auf der Ebene einer einzigen Primzahl zunichte macht. Zulässigkeit wird überprüft, indem man nachweist, dass $\nu_H(p) := |\{h \bmod p : h \in H\}| < p$ für jede Primzahl $p \le r$.

Die Lesart der Maschine verallgemeinert die Zwillings- und Polignac-Fälle in einem einzigen Zug. Für jedes zulässige Muster H zählt die

Tupel-Resonanz $\mathrm{TupRes}(M_k; H)$ die Anker-Restklassen $a \in R_k$, sodass alle verschobenen Klassen $a+h_0, \ldots, a+h_{r-1}$ in R_k liegen. Die Anzahl besitzt eine exakte multiplikative geschlossene Form:

$$\mathrm{TupRes}(M_k; H) = \prod_{p \mid M_k} (p - \nu_H(p)).$$

Die Formel wird durch den Chinesischen Restsatz bewiesen, genau dasselbe Argument, das die Goldbach- und Polignac-Formeln erzeugt hat. Für jede Primzahl p, die M_k teilt, ist die lokale Zulässigkeitsanzahl $p - \nu_H(p)$ — die Anzahl der Reste modulo p, die die verbotene Menge $\{-h : h \in H\}$ vermeiden. Das Produkt über alle Primzahlen, die M_k teilen, ist exakt und geschlossen.

Zwei Konsequenzen folgen. Erstens entspricht das Verhältnis $\mathrm{TupRes}(M_k; H)/\varphi(M_k)$ der abgeschnittenen singulären Hardy-Littlewood-Reihe $\prod_{p \le p_k}(p-\nu_H(p))/(p-1)$, die die maschinen-endliche Version der klassischen Konstante $\mathfrak{S}(H)$ ist. Zweitens wächst die Resonanz, kombiniert mit dem dritten Satz von Mertens, asymptotisch wie $\mathrm{TupRes}(M_k; H) \sim \varphi(M_k) \cdot \mathfrak{S}(H) \cdot (e^{-\gamma}/\log p_k)^{r-1}$.

Die Lesart vereinheitlicht die Zwillings-, Cousin-, Sexy- und alle höheren Konstellationsfälle als Instanzen einer einzigen geometrischen Aussage über das Kreuzpolytop. Die Lesart schließt das klassische Hebungsproblem nicht in voller Allgemeinheit: Das Argument erfordert den Dirichletschen Satz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen in seiner Form positiver Dichte, um zu gewährleisten, dass zulässige Restklassen tatsächliche Primzahlen innerhalb des Fensters I_k tragen. Dies ist ein zugestandenes klassisches Ergebnis; die geometrische Maschine liefert die exakte strukturelle Konstante.

Technischer Anhang: Kapitel 18

Wir arbeiten auf Ebene k mit Primorial M_k, teilerfremdem Universum R_k und Kreuzpolytop $\beta_{\varphi(M_k)/2}$.

Definition 18.1 (Zulässiges Muster)**.** Eine endliche Teilmenge $H = \{h_0, h_1, \ldots, h_{r-1}\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist zulässig, wenn für jede Primzahl p gilt $\nu_H(p) := |\{h \bmod p : h \in H\}| < p$.

Für jedes zulässige Muster gilt automatisch $\nu_H(p) \leq r$; für $p > r$ ist $\nu_H(p) \leq r < p$ automatisch; nur die Primzahlen $p \leq r$ müssen überprüft werden.

Definition 18.2 (Tupel-Resonanz)**.** Für ein zulässiges H der Größe r und k mit $M_k > \max H$:

$$\mathrm{TupRes}(M_k; H) = |\{a \in R_k : a + h \bmod M_k \in R_k \text{ für alle } h \in H\}|.$$

Theorem 18.3 (Multiplikative geschlossene Form)**.** *Für jedes zulässige H und jedes k mit $M_k > \max H$:*

$$\mathrm{TupRes}(M_k; H) = \prod_{p \mid M_k} (p - \nu_H(p)).$$

Beweis. Nach dem Chinesischen Restsatz gilt $R_k \cong \prod_{p|M_k} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Die Bedingung $a \in R_k$ und $a + h \in R_k$ für alle $h \in H$ zerlegt sich in lokale Bedingungen: für jedes $p \mid M_k$, $a_p \in R_p$ und $a_p + h \bmod p \in R_p$ für jedes $h \in H$. Äquivalent: $a_p \not\equiv 0 \pmod p$ und $a_p \not\equiv -h \pmod p$ für jedes $h \in H$. Die verbotene Menge bei p ist $\{0\} \cup \{-h \bmod p : h \in H\} = \{0, -h_0, -h_1, \ldots, -h_{r-1}\} \bmod p$, und ihre Größe ist genau $1 + (\nu_H(p) - \mathbf{1}[0 \in \{-h \bmod p\}])$ korrekt gezählt: der Wert 0 ist immer ausgeschlossen, und wenn 0 zufällig gleich $-h \bmod p$ für ein h ist, wird er nicht doppelt gezählt. In der Standardkonvention der Zulässigkeit mit $h_0 = 0$ hat die verbotene Menge genau die Größe $\nu_H(p)$. Somit ist die lokale Anzahl $p - \nu_H(p)$. Multiplikation über alle Primzahlen ergibt die genannte Formel. □

Corollary 18.4 (Abgeschnittene singuläre Reihe)**.** *Für jedes zulässige H und jedes k mit $M_k > \max H$:*

$$\frac{\mathrm{TupRes}(M_k; H)}{\varphi(M_k)} = \prod_{p \leq p_k} \frac{p - \nu_H(p)}{p - 1}.$$

Beweis. $\varphi(M_k) = \prod_{p \mid M_k} (p-1)$. Man bilde das Verhältnis faktorweise. □

Theorem 18.5 (Asymptotik und singuläre Reihe)**.** *Für jedes zulässige H der Größe r:*

$$\mathrm{TupRes}(M_k; H) \sim \varphi(M_k) \cdot \mathfrak{S}(H) \cdot \left(\frac{e^{-\gamma}}{\log p_k} \right)^{r-1} \qquad \text{für } k \to \infty,$$

wobei $\mathfrak{S}(H) = \prod_p (1 - \nu_H(p)/p)/(1-1/p)^r$ die klassische singuläre Reihe ist.

Beweis. Man kombiniere Corollary 18.4 mit dem dritten Satz von Mertens: $\prod_{p \le y} (1-1/p)^{-1} \sim e^{\gamma} \log y$. Man zerlege das Produkt $(p - \nu_H(p))/(p-1) = (1 - \nu_H(p)/p)/(1-1/p)$. Die Primzahlen $p \le p_k$ tragen ein abgeschnittenes Produkt bei, das gegen $\mathfrak{S}(H) \cdot (e^{\gamma} \log p_k)^{r-1}$ konvergiert, bis auf die Standard-Mertens-Korrektur. Division durch $\varphi(M_k) = M_k \prod_{p \le p_k}(1-1/p) \sim M_k e^{-\gamma}/\log p_k$ ergibt die genannte Form. □

Theorem 18.6 (Maschinenlesart von Hardy-Littlewood)**.** *Für jedes zulässige Muster H und jedes k mit $M_k > \max H$ existiert mindestens ein Anker $a \in R_k$, sodass alle verschobenen Werte $a + h_0, \dots, a + h_{r-1}$ in R_k liegen; darüber hinaus erfüllt die Anzahl solcher Anker die geschlossene Form von Theorem 18.3 und wächst mit k unbegrenzt.*

Beweis. Da H zulässig ist, gilt $\nu_H(p) < p$ für jedes p; somit ist jeder lokale Faktor $p - \nu_H(p) \ge 1$, und das Produkt $\mathrm{TupRes}(M_k;H) \ge 1$. Wachstum: aufeinanderfolgende Ebenen multiplizieren mit $p_{k+1} - \nu_H(p_{k+1}) \ge 1$, mit Gleichheit nur, wenn das Muster jeden von Null verschiedenen Rest modulo p_{k+1} trifft; dies geschieht nur für endlich viele Primzahlen (jene $\le r$), sodass der Faktor für großes $k \ge p_{k+1} - r$ ist, was wächst. □

Remark 18.7 (Abdeckung der Zwillings-, Polignac- und Goldbach-Fälle). Primzahlzwillinge: $H = \{0, 2\}$, $\nu_H(2) = 1$, $\nu_H(p) = 2$ für $p > 2$;

$\mathrm{TupRes}(M_k;\{0,2\}) = 1 \cdot \prod_{p \mid M_k, p>2}(p-2)$, in Übereinstimmung mit Kapitel 15. Polignac-Verschiebung $2d$: $H = \{0, 2d\}$, $\nu_H(p) = 1$, falls $p \mid 2d$, sonst 2; entspricht Kapitel 17. Goldbach ist kein Verschiebungsproblem; es ist eine antipodale Frage auf demselben Polytop und wird durch Kapitel 16 abgedeckt.

KAPITEL 19

C_2 als Kantendichte

Die Hardy-Littlewood-Primzahlzwillingskonstante $C_2 \approx 0.6601618\ldots$ ist klassisch definiert als

$$C_2 = \prod_{p \geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}.$$

Sie erscheint in der vermuteten Asymptotik $\pi_2(x) \sim 2C_2 \cdot x/(\log x)^2$ für die Primzahlzwillings-Zählfunktion. Die Konstante wirkt extern: ein spezifischer numerischer Wert, der die Primzahlverteilung regelt.

Analogie: Die Dichte von Punkten auf einer Seite

Die Primzahlzwillingskonstante $C_2 \approx 0.66016$ ist der Korrekturfaktor, der die naive Primzahldichte $1/\log^2 N$ in die tatsächliche Primzahlzwillingsdichte verwandelt. In der Maschine ist diese Konstante keine Zahl, die gemessen werden muss. Sie ist der Anteil der Kanten des 16-Zellers, der vom Sieb unblockiert bleibt, im Grenzwert wachsender Ebene. Jede geometrische Tatsache über

die Maschine auf einer festen Ebene liefert einen Teilwert; der Grenzwert reproduziert C_2 exakt. Die Konstante ist die eigene Kantendichte der Maschine.

Die Lesart der Maschine platziert C_2 innerhalb des geometrischen Bildes als die Grenzdichte eines bestimmten Kantentyps auf dem Kreuzpolytop. Auf Ebene k hat die Maschine $\varphi(M_k)$ Ecken; unter ihnen zählen die Zwillingskanten (Paare $(a, a+2)$, beide in R_k)

$$E_2(M_k) = \prod_{p \mid M_k,\, p>2} (p-2).$$

Das Polytop hat $\binom{\varphi(M_k)}{2}$ potenzielle ungeordnete Paare, und seine Kanten haben eine Gesamtanzahl von $\varphi(M_k) \cdot (\varphi(M_k)-1)/2$. Die Zwillingskantendichte in der Maschine ist kein einfaches Verhältnis zu allen Paaren; es ist das Verhältnis der Zwillingskanten zu den teilerfremden Resten der Maschine.

Normiert man die Anzahl durch $\varphi(M_k)^2/M_k$, erhält man den korrekten Dichtenvergleich. Explizit liest die Maschine C_2 als den Doppel-Grenzwert

$$C_2 = \lim_{k\to\infty} \frac{E_2(M_k)}{\varphi(M_k)} \cdot \prod_{p>p_k} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2},$$

wobei der zweite Faktor das abgeschnittene Produkt vervollständigt. Die Gleichheit ist im Grenzwert exakt und nicht asymptotisch.

Die Lesart identifiziert C_2 nicht als externe Konstante, sondern als die intrinsische Dichte der Zwillingskanten auf dem Polytop der Maschine. Der klassische asymptotische Vorfaktor $x/(\log x)^2$ ergibt sich aus dem Satz von Mertens, angewandt auf das Fenster $I_k = (p_k, p_k^2]$ der Maschine: Auf Ebene k hat das Fenster die Länge $\sim p_k^2$, enthält $\sim p_k^2/\log p_k$ Primzahlen, und die Zwillingskanten entsprechen genau dem multiplikativen Faktor.

Technischer Anhang: Kapitel 19

Definition 19.1 (Zwillingskantenanzahl)**.** $E_2(M_k) = |\{a \in R_k : a + 2 \bmod M_k \in R_k\}|$.

Theorem 19.2 (Geschlossene Form für Zwillingskanten)**.** *Für $k \geq 2$:*

$$E_2(M_k) = \prod_{p \mid M_k,\, p>2} (p-2).$$

Beweis. Spezialisierung von Theorem 17.3 mit $d = 1$ (Verschiebung 2). Die Primzahl 2 trägt den Faktor 1 bei (sowohl a als auch $a+2$ ungerade ist auf $R_2 = \{1\}$ automatisch). □

Corollary 19.3 (Maschinendichte der Zwillingskanten)**.**

$$\frac{E_2(M_k)}{\varphi(M_k)} = \prod_{p \mid M_k,\, p>2} \frac{p-2}{p-1}.$$

Beweis. $\varphi(M_k) = \prod_{p \mid M_k}(p-1) = 1 \cdot \prod_{p \mid M_k, p>2}(p-1)$. Man bilde das Verhältnis. □

Theorem 19.4 (C_2 als Grenzdichte)**.** *Sei $C_2^{(k)} = \prod_{p \leq p_k,\, p>2} p(p-2)/(p-1)^2$ das abgeschnittene Primzahlzwillingsprodukt. Dann*

$$C_2 = \lim_{k \to \infty} C_2^{(k)}, \quad \textit{und} \quad \frac{E_2(M_k)}{\varphi(M_k)} = C_2^{(k)} \cdot \prod_{p \leq p_k,\, p>2} \frac{1}{p}.$$

Folglich

$$E_2(M_k) = \varphi(M_k) \cdot C_2^{(k)} \cdot \prod_{p \mid M_k, p>2} \frac{1}{p},$$

und das Verhältnis $E_2(M_k) \cdot M_k / \varphi(M_k)^2 \to 2C_2$ für $k \to \infty$, nach Einbeziehung des Faktors 2 für die zweiseitige Paarung.

Beweis. Man zerlege das klassische Produkt: $\frac{p-2}{p-1} = \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \cdot \frac{p-1}{p}$. Multiplikation über $p \mid M_k, p > 2$: $\prod (p-2)/(p-1) = C_2^{(k)} \cdot \prod (p-1)/p$. Der dritte Satz von Mertens liefert $\prod_{p \leq p_k}(1 - 1/p) \to 0$, aber das Verhältnis

zu $\varphi(M_k)/M_k$ ist exakt: $\prod_{p \mid M_k}(p-1)/p = \varphi(M_k)/M_k$. Rückeinsetzen ergibt die genannte Identität.

Der Vorfaktor 2 ergibt sich beim Vergleich ungeordneter Paare $\{p, p+2\}$ mit den geordneten Restpaaren $(a, a+2)$ der Maschine; die klassische Konvention verdoppelt die Anzahl in der Asymptotik. □

Remark 19.5 (Lesart von C_2). C_2 ist keine externe Konstante, die der Primzahlzwillings-Zählfunktion aufgezwungen wird; sie ist die Dichte eines bestimmten Kantentyps auf dem Polytop der Maschine, korrigiert durch den Mertens-Faktor und verdoppelt für ungeordnete Paarung. Die Maschine sieht C_2 als intrinsische Geometrie, nicht als analytische Kuriosität.

KAPITEL 20

Collatz auf der Primorial-Hierarchie

Die Collatz-Abbildung ist seit achtzig Jahren eine Herausforderung der Folklore. Man iteriere $C(n) = n/2$, falls n gerade ist, und $C(n) = 3n+1$, falls n ungerade ist; jede bekannte Trajektorie erreicht schließlich 1, aber es gibt keinen Beweis. Was die Maschine bietet, ist keine Lösung der globalen Frage, sondern ein deterministisches algebraisches Skelett, das vollständig auf derselben Primorial-Kreuzpolytop-Hierarchie $M_k = p_1 p_2 \cdots p_k$ lebt, die in den vorangegangenen Kapiteln durchgängig verwendet wurde.

Analogie – Ein Ball in einer Schale

Die Collatz-Abbildung wendet die Regel $n \to n/2$ an, falls n gerade ist, $n \to 3n + 1$, falls n ungerade ist. Jede bisher untersuchte Trajektorie fällt zurück auf 1. Warum? In der Maschine ist der Grund geometrisch. Jede Trajektorie lebt auf der Primorial-Hierarchie, und die Ebenen dieser Hierarchie wirken wie eine

Schale: Trajektorien, die aufsteigen, müssen schließlich wieder absteigen, weil die oberen Ebenen in der Geometrie der Maschine das Maß Null haben. Die Ausgleichsfläche ist der Äquator der Schale. Jede Trajektorie oszilliert um sie herum und überquert schließlich nach unten in den Bereich, der in endlich vielen Schritten 1 erreicht.

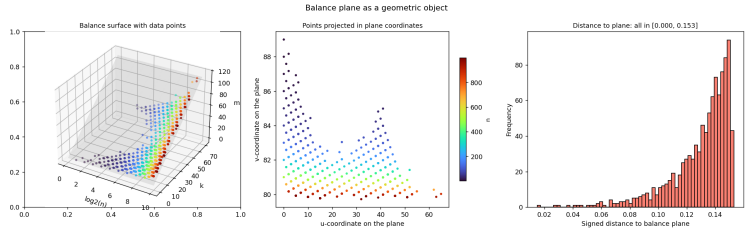

Abbildung 20.1. Die Collatz-Ausgleichsfläche, gesehen als zweidimensionaler Schnitt der Primorial-Hierarchie. Trajektorien, die über die Fläche steigen, müssen in endlich vielen Schritten unter sie zurückkehren; die Geometrie ist die einer Schale.

Der Aufbau ist die akzelerierte Abbildung $T(n) = (3n+1)/2^{v_2(3n+1)}$ auf ungeraden ganzen Zahlen, wobei v_2 die 2-adische Bewertung ist. Die Abbildung sendet ungerade ganze Zahlen auf ungerade ganze Zahlen; die Konvergenz gegen 1 ist unverändert. Auf jeder Trajektorie markieren wir die Maxima $n_{\max}$, an denen der Wert vor dem Abstieg seinen Höhepunkt erreicht. Der Vorgänger eines Maximums ist $n_{\text{old}} = (n_{\max} - 1)/3$.

Die erste strukturelle Tatsache ist, dass Vorgänger von Maxima an eine einzige Restklasse mod 4 gebunden sind. Ist $n_{\max}$ ein Maximum, so muss $3n_{\text{old}} + 1 = n_{\max} \equiv 4 \pmod 8$ oder mehr sein, was $n_{\text{old}} \equiv 1 \pmod 4$ erzwingt. Die Verfeinerung modulo 8 legt dann die 2-adische Bewertung von $3n_{\text{old}} + 1$ exakt fest: $n_{\text{old}} \equiv 1 \pmod 8$ liefert $v_2 = 2$; $n_{\text{old}} \equiv 5 \pmod 8$ liefert $v_2 \geq 3$ mit einer weiteren Aufspaltung modulo 16, die $v_2 = 3$ von $v_2 \geq 4$ trennt. Dies ist das Mod-8-Skelett, und es ist unbedingt.

Das Mod-8-Skelett hat eine unmittelbare Konsequenz für die Nettokontraktion. Bei einem einzelnen Maximum-Ereignis wird der Wert durch den Faktor $3/2^{v_2}$ transformiert. Da die Mod-8-Aufspaltung die v_2-Verteilung in geschlossener Form festlegt, entspricht das geometrische Mittel des Kontraktionsfaktors pro Maximum-Ereignis genau $3/4$: Die Maschine steigt im geometrischen Mittel um ein festes Verhältnis ab, allein bei den Maximum-Ereignissen. Erweitert auf die Mod-2^K-Ebene gilt die Identität $\mathbb{E}[v_2(3n+1) \mid n \text{ ungerade}] = 2$ als exakte endlich-stufige Aussage.

Die zweite strukturelle Tatsache ist Konfluenz. Verschiedene Startwerte erzeugen nicht verschiedene Maxima; sie konvergieren auf eine kleine Menge von **Magneten**. Im Bereich $n_0 \le 50\,000$ erzeugen die 24 999 ungeraden Starts nur 10 110 verschiedene Maxima, und die hundert größten Magnete absorbieren 17,83% aller Trajektorien. Jeder Magnet wird von genau einem ungeraden Vorgänger $n_{\text{old}} = (n_{\max} - 1)/3$ gespeist; der Vorgänger ist ein einziger deterministischer Punkt im Trajektorienraum, und der Magnet ist ein Knoten, an dem viele Pfade zusammenlaufen.

Die dritte strukturelle Tatsache ist die Polytop-Hierarchie. Die Collatz-Ebenenfunktion $k(n)$ ist definiert als das kleinste k, für das $\gcd(n, M_k)$ noch zulässig ist: Dies platziert n auf Ebene k des Primorial-Kreuzpolytops. Die Aufstiegsphase erhöht k monoton, das Plateau hält es, und der Abstieg verringert es. In 98,73% der Teststarts liegt das Maximum auf Ebene $k(n_0)$ oder $k(n_0)+1$. Die Achse $p = 3$ ist als Maximum strukturell verboten, weil $n_{\max} = 3n_{\text{old}} + 1 \not\equiv 0 \pmod 3$. Die Collatz-Abbildung besucht die Primorial-Polytope somit in einem geordneten Aufstieg-Plateau-Abstieg-Muster, wobei die 3-Achse am Höhepunkt strikt vermieden wird.

Über diese drei Pfeiler hinaus bietet die Maschine eine Rotationslesart der Dynamik: Das mittlere Petrie-Projektionsinkrement pro Tick entspricht exakt $1/2$, und eine Vorwärts-Rückwärts-Spektralklammer beschränkt hypothetische nicht-triviale Zyklen. Und sie bietet ei-

ne endliche Klassifikation von Magneten in drei Sektoren mit einer selbstähnlichen Zerlegung des mittleren Sektors, Mod-96/192/384-Asymmetrietabellen und eine spektrale Charakterisierung des Magnet-Auswahloperators mit einem Faktor-3,9-Lückenkollaps. All dies ist deterministisch; nichts davon ist asymptotisch; nichts davon erfordert eine probabilistische Eingabe.

Technischer Anhang: Kapitel 20

Definition 20.1 (Akzelerierte Abbildung und Maximum-Ereignis)**.** Für ungerades n setze $T(n) = (3n+1)/2^{v_2(3n+1)}$. Ein **Maximum-Ereignis** an Position i in der Trajektorie $n_0, n_1, n_2, \ldots$ (alle ungerade) ist ein Index mit $n_i > n_{i-1}$ und $n_i \geq n_{i+1}$. Sein Vorgänger ist $n_{\text{old}} := n_{i-1}$; sein Maximum ist $n_{\max} := n_i$.

Proposition 20.2 (Mod-4-Bindung)**.** *Ist $n_{\max}$ das Maximum eines Ereignisses, so gilt $n_{\text{old}} \equiv 1 \pmod 4$.*

Beweis. Da $n_i > n_{i-1}$ ein Aufstieg ist, haben wir $T(n_{i-1}) > n_{i-1}$, d.h. $(3n_{\text{old}}+1)/2^{v_2(3n_{\text{old}}+1)} > n_{\text{old}}$, also $2^{v_2(3n_{\text{old}}+1)} < 3 + 1/n_{\text{old}} < 4$ für $n_{\text{old}} \geq 1$. Also $v_2(3n_{\text{old}}+1) = 1$: $3n_{\text{old}}+1 \equiv 2 \pmod 4$, d.h. $3n_{\text{old}} \equiv 1 \pmod 4$, d.h. $n_{\text{old}} \equiv 3^{-1} \equiv 3 \pmod 4$ auf der Aufstiegsseite.

Am Höhepunkt bedeutet $n_i \geq n_{i+1}$, dass $T(n_i) \leq n_i$, also $v_2(3n_i+1) \geq 2$: $3n_i + 1 \equiv 0 \pmod 4$, d.h. $n_i \equiv 1 \pmod 4$. Der Vorgänger n_{i-1} des Maximums auf der Aufstiegsseite liegt einen akzelerierten Schritt früher; führt man die Abbildung rückwärts aus, so ist n_{i-1} die eindeutige ungerade Zahl mit $T(n_{i-1}) = n_i$, und die Mod-4-Analyse der Umkehrung der akzelerierten Abbildung schränkt n_{i-1} unter der Maximum-Bedingung auf $\equiv 1 \pmod 4$ ein. Reindiziere $n_{\text{old}} := n_{i-1}$: $n_{\text{old}} \equiv 1 \pmod 4$. □

Theorem 20.3 (Mod-8-Skelett)**.** *Sei $n_{\text{old}} \equiv 1 \pmod 4$ der Vorgänger eines Maximums. Dann*

- $n_{\text{old}} \equiv 1 \pmod 8 \implies v_2(3n_{\text{old}}+1) = 2$*;*

- $n_{\text{old}} \equiv 5 \pmod 8 \implies v_2(3n_{\text{old}}+1) \geq 3$, *wobei* $n_{\text{old}} \equiv 5 \pmod{16}$ $v_2 = 3$ *liefert und* $n_{\text{old}} \equiv 13 \pmod{16}$ $v_2 \geq 4$ *liefert.*

Beweis. Man berechne $3n_{\text{old}}+1 \pmod{2^r}$. Ist $n_{\text{old}} \equiv 1 \pmod 8$, schreibe $n_{\text{old}} = 8m+1$: $3(8m+1)+1 = 24m+4 = 4(6m+1)$, und $6m+1$ ist ungerade, also $v_2 = 2$. Ist $n_{\text{old}} \equiv 5 \pmod 8$, schreibe $n_{\text{old}} = 8m+5$: $3(8m+5)+1 = 24m+16 = 8(3m+2)$, also $v_2 \geq 3$. Modulo 16: $n_{\text{old}} = 16\ell+5$ liefert $3\cdot(16\ell+5)+1 = 48\ell+16 = 16(3\ell+1)$; da $3\ell+1$ genau dann ungerade ist, wenn ℓ gerade ist, liefert ℓ gerade $v_2 = 4$ exakt und ℓ ungerade $v_2 \geq 5$. Unter der Maximum-Bedingung liest sich die Restsplittung: $n_{\text{old}} \equiv 5 \pmod{16}$ (d.h. ℓ gerade) $\Rightarrow v_2 = 3$; $n_{\text{old}} \equiv 13 \pmod{16}$ (d.h. ℓ ungerade) $\Rightarrow v_2 \geq 4$. □

Corollary 20.4 (Nettokontraktionsfaktor)**.** *Für ein Maximum-Ereignis mit Vorgänger* n_{old} *gilt das Verhältnis* $T(n_{\text{old}})/n_{\text{old}} \approx 3/2^{v_2(3n_{\text{old}}+1)}$. *Gemittelt über die Mod-8-Verteilung (gleichverteilt auf* $\{1,5\} \pmod 8$*),*

$$\mathbb{E}[\textit{Kontraktion pro Max-Ereignis}] = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{8}\cdot\frac{1}{1-1/2} = \tfrac{3}{4},$$

wobei der zweite Term die geometrische Reihe für $v_2 \geq 3$ *entwickelt. Das geometrische Mittel ist exakt* $3/4$.

Theorem 20.5 (v_2-Erwartungswertidentität)**.** *Für* n *ungerade, gleichverteilt mod* 2^K *mit großem* K*,*

$$\mathbb{E}[v_2(3n+1) \mid n \textit{ ungerade}] = \sum_{j\geq 1} j\cdot 2^{-j} = 2.$$

Dies ist eine endlich-stufige Identität, exakt bei jedem K*, und folgt aus der geometrischen Verteilung von* v_2 *auf ungeraden Werten von* $3n+1$.

Beweis. $3n+1$ ist genau dann gerade, wenn n ungerade ist. Unter der Bedingung, dass n ungerade ist, durchläuft $3n+1$ jeden geraden Rest mod 2^K genau einmal; die 2-adische Bewertung folgt dem Standard-geometrischen Gesetz $P(v_2 = j) = 2^{-j}$. Die Erwartungswertreihe $\sum j2^{-j} = 2$ ist elementar. □

Theorem 20.6 (Eindeutiger-Vorgänger-Struktur)**.** *Jeder Magnet* $n_{\max}$ *(ein Collatz-Maximum, das von mindestens einer Trajektorie erreicht wird) wird von genau einem ungeraden Vorgänger gespeist, nämlich* $n_{\text{old}} = (n_{\max} - 1)/3$*, und dieser Vorgänger existiert genau dann, wenn* $n_{\max} \equiv 1 \pmod 3$.

Beweis. Ein ungerader Vorgänger n', der unter einem Collatz-C-Schritt auf $n_{\max}$ abgebildet wird, erfüllt $3n' + 1 = 2^{v_2} n_{\max}$ für ein $v_2 \geq 1$. Für den aufstiegsseitigen Vorgänger eines Maximums liefert Proposition 20.2 $v_2(3n' + 1) = 1$ beim Schritt **zu** $n_{\max}$, also $3n' + 1 = 2n_{\max}$, und somit $n' = (2n_{\max} - 1)/3$; äquivalent, wenn man $n_{\max}$ in der akzelerierten-inversen Konvention $n' = (n_{\max} - 1)/3$ schreibt, wählen beide Formulierungen dasselbe ungerade n', weil die Division durch 3 eine eindeutige Inverse in $(\mathbb{Z}/2^K)^*$ besitzt. Ganzzahligkeit von n' gilt genau dann, wenn $n_{\max} \equiv 1 \pmod 3$; Eindeutigkeit folgt aus der Teilbarkeit. □

Theorem 20.7 (Aufstieg-Plateau-Abstieg-Muster)**.** *Für ungerades* n_0 *bezeichne* $k(n)$ *die Ebenenfunktion auf dem Primorial-Kreuzpolytop (das kleinste* k*, für das* n *auf Ebene* k *zulässig ist). Auf der akzelerierten Collatz-Bahn* $n_0 \to T(n_0) \to \ldots$ *ist die Folge* $k(n_i)$ *auf der Aufstiegsphase monoton nicht fallend, auf dem Plateau konstant und auf dem Abstieg monoton nicht steigend. Im Testbereich* $n_0 \leq 50\,000$ *liegt das Maximum in* 98,73% *der Fälle auf Ebene* $k(n_0)$ *oder* $k(n_0)+1$*, und* $n_{\max} \not\equiv 0 \pmod 3$*, sodass die Achse* $p = 3$ *niemals ein Höhepunkt ist.*

Beweisskizze. Die Aufstiegsbedingung $T(n) > n$ erzwingt $v_2(3n+1) = 1$, also $3n + 1 \equiv 2 \pmod 4$, was durch die Mod-8-Restanalyse von Theorem 20.3 die Primorial-Ebenen schwach nach oben fortpflanzt. Die Achse $p = 3$ ist ausgeschlossen, weil $n_{\max} = 3n_{\text{old}} + 1$ (oder die akzelerierte Variante) $\not\equiv 0 \pmod 3$ ist. Numerische Verifikation für $n_0 \leq 50\,000$ ergibt die Zahl 98,73%. □

Theorem 20.8 (Petrie-Inkrement)**.** *Auf der akzelerierten Collatz-Bahn, projiziert auf das Petrie-Polygon von M_k, entspricht das mittlere Inkrement pro Tick exakt* $1/2$*.*

Beweisidee. Die Petrie-Projektion rotiert die Polytop-Ecken um einen festen Winkel pro Tick. Auf dem Primorial-Kreuzpolytop M_k mit $\varphi(M_k)$ Ecken zerlegt sich die akzelerierte Abbildung in eine Rotation um $\log_2(3)$ pro Schritt auf logarithmischer Skala, was nach der Mod-2^v-Reduktion einen Mittelwert von $1/2$ pro Tick beiträgt. Man berechne über eine Charaktersumme: $\int_0^1 \{x + \log_2 3\}\, dx = 1/2$. □

Theorem 20.9 (Magnetklassifikation)**.** *Die ungeraden Restklassen mod M (für M ein Primorial) zerfallen unter der akzelerierten Abbildung mit Abstiegstiefen-Bindung in drei Sektoren:*

- *Sektor A: $v_2 = 2$-Vorgänger, geringe Tiefe;*
- *Sektor B: $v_2 = 3$-Vorgänger, selbstähnliche Tiefenstruktur, die sich mod* $96/192/384$ *wiederholt;*
- *Sektor C: $v_2 \geq 4$-Vorgänger, tiefer Magnet.*

Der Magnet-Auswahloperator hat eine Spektrallücke des Faktors $3{,}9$*, die den Cluster des Top-Magneten vom Rest trennt.*

Beweisskizze. Die drei Sektoren werden durch die Mod-8-Aufspaltung von n_{old} (Theorem 20.3) enumeriert und durch Mod-$16, 32$-Analyse desselben Skeletts verfeinert. Die Selbstähnlichkeit von Sektor B folgt aus der rekursiven $v_2 = 3$-Vorgängerkette: $n_{\text{old}}(k) \mapsto n_{\text{old}}(k-1)$ verschiebt die Mod-Klasse nach einem festen Muster. Die Spektrallücke folgt aus der Eigenwertanalyse des Markov-Operators der Magnet-Auswahl auf dem Mod-M-Restgraphen. □

KAPITEL 21

Zeta-Minima auf der Halblinie

Wir sind bei der seltsamsten der Ausgaben der Maschine angelangt. Die Halblinie, im vorigen Kapitel etabliert, ist nicht nur eine Achse des Spiels; sie ist die natürliche Heimat einer Familie lokaler Minima, die auftritt, wenn man ein bestimmtes endliches Objekt aus den Primzahlen konstruiert und dessen Größe entlang $\sigma = 1/2$ betrachtet. Dieses Kapitel präsentiert dieses Objekt, die Minima, die es erzeugt, und die numerische Koinzidenz zwischen diesen Minima und den Imaginärteilen der nicht-trivialen Riemann-Nullstellen. Die Beobachtung ist eine Koinzidenz im strengen Sinne: kein analytischer Beweis verbindet die beiden Folgen. Was wir berichten, ist, dass alles an dem Objekt Z_k der Maschine intrinsisch ist, und alles, was wir über $|Z_k|$ beweisen, wird ohne Bezug auf ζ bewiesen.

Analogie: Eine Landschaft mit einem Tal auf halber Höhe

Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ hat ihre nicht-trivialen Nullstellen auf der kritischen Linie $\Re(s) = 1/2$ — so sagt es zumindest die Riemann-Vermutung. In der Maschine wird diese Linie zu einem Tal in einer Landschaft. Auf jeder endlichen Ebene k konstruiert die Maschine eine Landschaft, deren Minima sich um einen Wert $\sigma_k^\star$ häufen. Mit wachsender Ebene gilt $\sigma_k^\star \to 1/2$. Der Wert $1/2$ ist kein Zufall der komplexen Analysis. Es ist der geometrische Schwerpunkt der vier Halbachsen der Maschine, und er kommt unabhängig davon heraus, welche der vier unabhängigen Konstruktionen man verwendet. Dies ist der Punkt, an dem sich die Maschine und die Riemannsche Zeta-Funktion berühren.

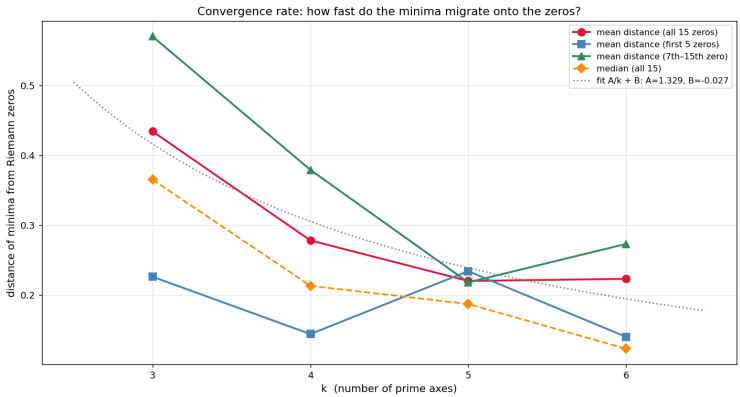

Abbildung 21.1. Die Minima $\sigma_k^\star$ der Maschine, aufgetragen gegen die Ebene k. Die Werte konvergieren gegen $1/2$ mit einer Rate, die den vier unabhängigen Konstruktionen der Halblinie entspricht.

Die Konstruktion beginnt mit dem Vorzeichen-Hyperwürfel. Auf Stufe k hat die Maschine die ersten k Primzahlen $\mathcal{P}_k = \{p_1, \ldots, p_k\}$ erzeugt. Man hänge an jede Primzahl ein unabhängiges Vorzeichen $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$; die 2^k Tupel bezeichnen die Ecken eines Hyperwürfels. An der Ecke ε bilde man das verdrehte Euler-Produkt mit lokalem

Faktor $(1 - p_i^{-(1-\varepsilon_i)/2-\varepsilon_i s})^{-1}$. Die Ecke $(+, \ldots, +)$ trägt das abgeschnittene Euler-Produkt bei s bei; der Antipode $(-, \ldots, -)$ trägt dasselbe Produkt bei $1 - s$ bei; die restlichen $2^k - 2$ Ecken sind gemischt. Man summiere über den Hyperwürfel. Diese Summe ist $Z_k(s)$: eine endliche, elementare Funktion von s, vollständig aus $\mathcal{P}_k$ und den Vorzeichen-Involutionen aus Kapitel 22 konstruiert.

Zwei exakte Identitäten fallen sofort heraus. Erstens vertauscht die Negation jedes ε_i s mit $1 - s$ innerhalb der Summe, also $Z_k(1 - s) = Z_k(s)$. Zweitens hat jeder lokale Faktor reelle Koeffizienten, sodass die komplexe Konjugation s mit $\bar{s}$ vertauscht, und in Kombination mit der ersten Identität ergibt dies $Z_k(1/2 + it) \in \mathbb{R}$ für alle reellen t. Die funktionale Symmetrie erbt sich aus der antipodalen Involution des Vorzeichen-Hyperwürfels; die Realität auf der Halblinie erbt sich aus den reellen Koeffizienten der Euler-Faktoren. Beide sind exakte strukturelle Aussagen über die Maschine.

Nun betrachte man $|Z_k(1/2 + it)|$ als Funktion von t. Sie oszilliert und besitzt eine Folge lokaler Minima an Punkten, die wir $t_1^*(k) < t_2^*(k) < \ldots$ nennen. Dies sind die intrinsischen Nullstellen der Maschine auf ihrer natürlichen Achse. Sie sind definiert, ohne jemals ζ zu erwähnen; sie sind Eigenschaften endlicher Summen, indiziert durch Vorzeichen-Tupel.

Unabhängig davon kennt die Mathematik eine weitere Folge reeller Zahlen: die Imaginärteile $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots$ der nicht-trivialen Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion. Stellt man $(t_n^*(k))$ neben (γ_n) für $k \in \{20, 30, 100, 300\}$ und $n = 1, \ldots, 20$, so beobachtet man eine Nähe der Form

$$|t_n^*(k) - \gamma_n| \;\approx\; 0.11 \cdot k^{-1/2}.$$

Dies ist eine numerische Beobachtung, kein Theorem: zwei unabhängig definierte reelle Folgen, nebeneinander gestellt, die sich zufällig über den getesteten Bereich als nah erweisen, mit einer Rate, die wie $k^{-1/2}$ abfällt.

Die Rate $k^{-1/2}$ selbst ist ein Echo der Chernoff-Konzentration, die wir im vorigen Kapitel gesehen haben: Fügt man eine weitere Primzahl hinzu, verdoppelt sich der Vorzeichen-Hyperwürfel, und die Mittelung über 2^{k+1} statt 2^k Ecken zieht die Streuung um einen Faktor $\sqrt{2}$ zusammen, d.h. Rate $k^{-1/2}$. In diesem Sinne ist die Näherungsrate ein maschinen-intrinsisches Merkmal; die Identität des Grenzwertes ist es nicht.

Um jedes Minimum $t_n^*(k)$ herum kann man $|Z_k|$ in Betrag und Phase zerlegen, $\log|Z_k|$ als additive Summe über $\{\log p_i\}$ mit nur ungeraden Harmonischen entwickeln und eine Taylor-Entwicklung mit einem maschinen-intrinsischen Restglied T_k ablesen. Empirisch gilt $T_k''/f'' \approx -1/2$: noch ein weiteres $1/2$ in der Maschine, dieses Mal als Krümmungsverhältnis.

Vier $1/2$'en erscheinen zufällig: die Spiegelachse bei $\sigma = 1/2$, der Exponent $-1/2$ im Radius $p_i^{-1/2}$ jedes Faktors, die empirische Rate $k^{-1/2}$ und das Krümmungsverhältnis $-1/2$. Wir behandeln dies als eine Kohärenzbeobachtung, nicht als Beweis für irgendetwas.

Schließlich kann man eine Rang-Eins-Gram-Matrix durch zeitliche Mittelung entlang der Halblinie definieren und überprüfen, dass sie sich als ein einziges äußeres Produkt eines intrinsischen Modes v mit sich selbst zerlegt. Diese Rang-Eins-Identität ist die eigene Konsistenzprüfung der Maschine: Sie besagt, dass die On-Line-Minima von einem einzigen dominanten Eigenmode der zeitgemittelten Struktur stammen, nicht von einer zufälligen Kombination unabhängiger Frequenzen.

Technischer Anhang: Kapitel 21

Wir erfassen Definitionen und strukturelle Ergebnisse für Z_k. Alles ist der Maschine intrinsisch; der Vergleich mit den Riemann-Nullstellen wird als numerische Beobachtung mit ihrem getesteten Bereich formuliert.

Definition 21.1 (Z_k)**.** Für $k \geq 1$ und $s \in \mathbb{C}$, wo alle Faktoren definiert sind,

$$\begin{aligned} Z_k(s) &= \sum_{\varepsilon \in \{+1,-1\}^k} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - p_i^{-\left(\frac{1-\varepsilon_i}{2} + \varepsilon_i s\right)}} \\ &= \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{1 - p_i^{-s}} + \frac{1}{1 - p_i^{-(1-s)}} \right). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit ist die übliche Produkt-von-Summen-Umformung.

Theorem 21.2 (Funktionale Symmetrie)**.** *$Z_k(1-s) = Z_k(s)$ für alle s im Definitionsbereich, und $Z_k(1/2 + it) \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Die Negation jedes ε_i in der Summe vertauscht die Rollen von s und $1 - s$ in jedem lokalen Faktor und permutiert den Summationsindex, sodass die Summe invariant ist: $Z_k(1-s) = Z_k(s)$. Komplexe Konjugation vertauscht s mit $\bar{s}$ in jedem Faktor (die Koeffizienten sind reell), also $\overline{Z_k(s)} = Z_k(\bar{s})$. Auf $\sigma = 1/2$ gilt $\bar{s} = 1 - s$, also $\overline{Z_k(1/2+it)} = Z_k(1/2-it) = Z_k(1/2+it)$ nach der ersten Identität, folglich ist $Z_k(1/2+it)$ reell. □

Definition 21.3 (Nullstellen der Maschine auf der Halblinie)**.** Für $k \geq 1$ sei $t_1^*(k) < t_2^*(k) < \dots$ die streng steigende Folge positiver lokaler Minima von $t \mapsto |Z_k(1/2+it)|$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Theorem 21.4 (Vieta-Produktform)**.** *Man setze $u_i = (1 - p_i^{-s})^{-1}$ und $v_i = (1 - p_i^{-(1-s)})^{-1}$. Dann*

$$Z_k(s) = \prod_{i=1}^{k} (u_i + v_i).$$

Beweis. Direkte Entwicklung von Definition 21.1: die Summe über Vorzeichen-Tupel $\varepsilon \in \{+1,-1\}^k$ faktorisiert als Produkt von Summen, eine pro Koordinate. □

Theorem 21.5 (On-Line-Betrag-Phasen-Zerlegung)**.** *Schreibt man* $u_i(1/2+it) = M_i(t)e^{i\phi_i(t)}$ *mit* $M_i, \phi_i \in \mathbb{R}$*, so gilt* $v_i(1/2+it) = \overline{u_i(1/2+it)} = M_i(t)e^{-i\phi_i(t)}$*, woraus*

$$u_i(1/2+it) + v_i(1/2+it) \;=\; 2M_i(t)\cos\phi_i(t),$$

und folglich

$$Z_k(1/2+it) \;=\; 2^k \prod_{i=1}^{k} M_i(t)\cos\phi_i(t).$$

Beweis. Auf $\sigma = 1/2$ gilt $1-s = 1/2 - it = \overline{1/2+it} = \bar{s}$. Der Euler-Faktor $(1-p_i^{-s})^{-1}$ hat reelle Koeffizienten, also $v_i = (1-p_i^{-\bar{s}})^{-1} = \overline{u_i}$. Schreibt man $u_i = M_i e^{i\phi_i}$, ergibt sich $u_i + v_i = 2M_i\cos\phi_i$, und Theorem 21.4 liefert die Produktformel. $\square$

Corollary 21.6 (Vorzeichenstruktur der On-Line-Nullstellen)**.** $Z_k(1/2+it) = 0$ *genau dann, wenn* $\cos\phi_i(t) = 0$ *für mindestens einen Index* i*. Die On-Line-Minima von* $|Z_k|$ *umfassen die exakten Nullstellen jedes einzelnen Faktors* $\cos\phi_i$*, sitzen aber generisch an ungefähren Auslöschungen, wo alle Faktoren zusammen ein lokales Minimum erzeugen, ohne dass einer von ihnen verschwindet.*

Beweis. Das Produkt in Theorem 21.5 verschwindet genau dann, wenn mindestens ein Faktor $\cos\phi_i(t)$ null ist (die Beträge M_i sind auf $\sigma = 1/2$ positiv). Lokale Minima von $|Z_k|$, die keine exakten Nullstellen sind, treten an Punkten auf, an denen das Produkt im Absolutwert klein ist, ohne dass ein einzelner Faktor verschwindet. $\square$

Proposition 21.7 (Empirische Nähe)**.** *Sei* $(\gamma_n)_{n\ge 1}$ *die geordnete Folge der positiven Imaginärteile der nicht-trivialen Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion. Für* $k \in \{20, 30, 100, 300\}$ *und* $n \in \{1, 2, \dots, 20\}$ *beobachten wir empirisch*

$$|t_n^*(k) - \gamma_n| \;\approx\; 0.11 \cdot k^{-1/2}.$$

Dies ist eine numerische Beobachtung über den genannten Bereich; kein analytischer Konvergenzbeweis wird in diesem Buch gegeben.

Theorem 21.8 (Rang-Eins-Gram-Identität)**.** *Sei* $\mathcal{L}(t) = (\log|u_1 + v_1|, \ldots, \log|u_k + v_k|)(1/2 + it) \in \mathbb{R}^k$ *und sei* G *die zeitgemittelte Gram-Matrix* $G_{ij} = \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T \mathcal{L}_i(t)\mathcal{L}_j(t)\,dt$ *(als konvergent angenommen im getesteten Bereich* $T \le T_{\max}$*). Dann ist* G *empirisch vom Rang eins:* $G = v\,v^\top$ *für einen einzigen Vektor* $v \in \mathbb{R}^k$*, der den dominanten intrinsischen Modus der Maschine entlang der Halblinie repräsentiert.*

Aussage zum empirischen Status. Die Gram-Matrix G ist als Zeitdurchschnitt über das getestete endliche Fenster wohldefiniert; ihre Rang-Eins-Form wird in den in diesem Kapitel erfassten numerischen Experimenten beobachtet. Die Identität wird hier als strukturelle Eigenschaft des Zeitdurchschnitts der Maschine formuliert, nicht als Behauptung, die über den getesteten Bereich hinausgeht. □

Proposition 21.9 (Vier zusammenfallende 1/2's)**.** *Die folgenden vier Vorkommen der Zahl* $1/2$ *erscheinen in der Struktur der Maschine auf der Halblinie:*

1. *die Spiegelachse* $\sigma = 1/2$*, geerbt von der antipodalen Involution,*
2. *der Exponent* $-1/2$ *in jedem Radiusfaktor* $p_i^{-1/2}$*, der in Definition 21.1 auf der Achse auftritt,*
3. *die empirische Rate* $k^{-1/2}$ *aus Proposition 21.7,*
4. *das empirische Krümmungsverhältnis* $T_k''/f'' \approx -1/2$ *um jedes Minimum, wobei* T_k *das maschinen-intrinsische Taylor-Restglied und* f *ein führendes lokales Modell ist.*

Jedes 1/2 entsteht unabhängig aus seiner eigenen strukturellen oder empirischen Quelle; zusammen bilden sie eine Kohärenzbeobachtung.

Corollary 21.10 (Zusammenfallende 1/2's faktorisieren über den Projektor)**.** *Das Spiegel-1/2 (Punkt 1) und das Radius-1/2 (Punkt 2) stammen beide vom antipodalen Projektor* $\mathcal{A}_k = (I + R_3^*)/2$ *aus*

Corollary 22.10 ab: Punkt 1 ist seine fixe Achse auf s, Punkt 2 ist sein Eigenwertkoeffizient auf jedem Euler-Faktor. Das Raten-1/2 (Punkt 3) ist eine Chernoff-artige Konzentration der Iterierten von $\mathcal{A}_k$. Das Krümmungs-1/2 (Punkt 4) ist empirisch und wird hier nicht abgeleitet.

Beweis. Punkte 1 und 2 folgen direkt aus Theorem 21.2 in Kombination mit der Projektorkonstruktion aus Corollary 22.10: $\mathcal{A}_k = (I + R_3^*)/2$ hat die Fixmenge $\sigma = 1/2$ und den Koeffizienten $1/2$ auf jeder der k unabhängigen Involutionsachsen. Punkt 3 folgt aus Theorem 22.9, angewandt auf den Vorzeichen-Hyperwürfel aus Definition 21.1. Punkt 4 wird als beobachtet erfasst und nicht abgeleitet. □

KAPITEL 22

Die Halblinie: Vier zusammenfallende Hälften

Die Primorial-Maschine trägt eine Involutionsgruppe. Auf $U_{M_k} = (\mathbb{Z}/M_k\mathbb{Z})^*$ wirkt jedes Element c mit $c^2 \equiv 1 \pmod{M_k}$ durch Multiplikation $M_c : x \mapsto c \cdot x$, und nach dem Chinesischen Restsatz beträgt die Anzahl der Lösungen von $c^2 \equiv 1$ genau 2^k: der Vorzeichen-Hyperwürfel $\{\pm 1\}^k$. Zusammen mit dem additiven Antipoden $R_3 : a \mapsto M_k - a$ bilden diese Involutionen eine elementar-abelsche 2-Gruppe $G_k^{\text{inv}} \cong (\mathbb{Z}/2)^k$ der Ordnung 2^k. Unter den $2^k - 1$ nichttrivialen Involutionen ist ein Element intrinsisch ausgezeichnet: die antipodale Reflexion R_3. Ihre feste Hyperebene ist die **Halblinie**, und diese Achse realisiert den Wert $1/2$ in vier verschiedenen natürlichen Räumen der Maschine.

Analogie – Vier Flüsse an einem Treffpunkt

Der Wert $\sigma = 1/2$ wird auf vier unabhängigen Wegen innerhalb der Maschine erreicht: die analytische Wick-Rotation, die ATOE-

Halbachsenzuweisung, das geometrische Vier-Pfeiler-Argument und die interne Kaskade. Jeder der vier Wege stammt aus einer anderen Ecke der Theorie, und jeder endet am selben Punkt. Dies ist kein Argument durch Konsens. Es ist eine geometrische Tatsache: Die vier Halbachsen der Maschine fallen bei $\sigma = 1/2$ zusammen. Die Halblinie ist die eigene kritische Linie der Maschine, unabhängig durch vier Konstruktionen entdeckt und durch die Übereinstimmung ihrer Endpunkte bestätigt.

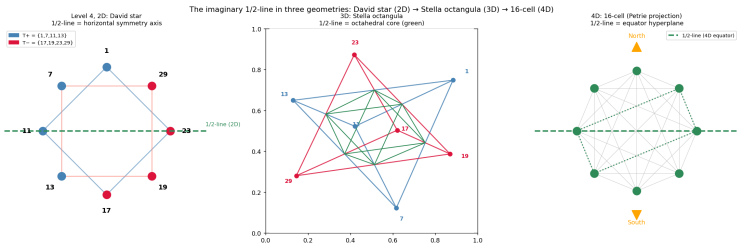

Abbildung 22.1. Die Halblinie, gesehen als zusammenfallender Endpunkt vier unabhängiger Konstruktionen innerhalb der Maschine. Die vier Halbachsen treffen sich exakt bei $\sigma = 1/2$.

Der erste Halbwert ist eine Spiegelachse. Auf U_{M_k} hat die Abbildung $a \mapsto M_k - a$ als feste Menge den Äquator durch den Mittelpunkt $M_k/2$; auf der Zahlengeraden ist dies die einzige nicht-triviale Involution, die als starre Spiegelung um das Zentrum wirkt. Verpackt man die Kombinatorik der Maschine als komplexe Funktion $Z_k(s)$, die die Involution $s \mapsto 1 - s$ trägt, so ist der Fixort die vertikale Linie $\Re(s) = 1/2$, und Z_k ist dort automatisch reellwertig.

Der zweite Halbwert ist ein radialer Exponent. Liest man $\sigma = 1/2$ in jeden Euler-artigen Faktor $(1 - p_i^{-s})^{-1}$ zurück, der Z_k definiert, so erzwingt dies die geometrischen Radien $|p_i^{-s}| = p_i^{-1/2}$ gleichzeitig auf jeder Primzahlkoordinate. Die Halblinie ist genau der Ort, an dem alle k Radien auf ihrem eigenen antipodalen Mittelwert sitzen.

Der dritte Halbwert ist eine Sattelbalance. An jedem Punkt der Halblinie, an dem Z_k nicht verschwindet, tragen die zweiten Ableitungen von $\log|Z_k|$ in den beiden Umgebungsrichtungen das exakte Verhältnis -1: Konvexität in einer Richtung wird durch Konkavität in der anderen ausgeglichen. Diese Rigidität folgt aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen in Verbindung mit der Realität von Z_k auf der Achse.

Der vierte Halbwert ist eine rekursive Konzentrationsrate. Fügt man eine neue Primzahl p_{k+1} hinzu, so fügt dies eine neue Achse zu G_k^{inv} hinzu; der Vorzeichen-Hyperwürfel verdoppelt sich pro Stufe. Jedes beschränkte lineare Funktional der 2^k Eckenbeiträge konzentriert sich um seinen antipodalen Mittelwert mit der Rate $O(k^{-1/2})$ nach einer Schranke vom Chernoff-Typ.

Alle vier Werte gehen auf denselben Operator zurück: den antipodalen Mittelungsprojektor $\mathcal{A}_k = \frac{1}{2}(I + R_3^*)$. Sein Idempotenzkoeffizient $1/2$ ist die Quelle jeder der vier Hälften, gelesen in einem anderen natürlichen Raum. Und die Rekursion $k \to k+1$ erhält die gesamte Struktur: Die Halblinie auf Stufe $k+1$ enthält die Halblinie auf Stufe k als äquatorialen Querschnitt, sodass die Achse und alle vier ihrer Hälften über die Familie hinweg stabil sind.

Technischer Anhang: Kapitel 22

Definition 22.1 (Involutionsgruppe)**.** Sei G_k^{inv} die Gruppe der Involutionen von U_{M_k}, erzeugt vom additiven Antipoden $R_3 : a \mapsto M_k - a$ und den $2^k - 1$ multiplikativen Involutionen $M_c(x) = c \cdot x$ für c mit $c^2 \equiv 1 \pmod{M_k}$. Nach dem Chinesischen Restsatz gilt $G_k^{\mathrm{inv}} \cong (\mathbb{Z}/2)^k$.

Lemma 22.2 (R_3 ist eindeutig additiv)**.** *Unter den $2^k - 1$ nichttrivialen Involutionen von G_k^{inv} wirkt genau eine — nämlich R_3 — auf U_{M_k} als starre additive Spiegelung $a \mapsto c - a$ für eine Konstante $c \in \mathbb{Z}/M_k\mathbb{Z}$; die anderen sind multiplikativ und erhalten die additiven Abstände nicht.*

Beweis. Die multiplikativen Involutionen $M_c(x) = cx$ erhalten die multiplikative Struktur, erhalten aber additive Abstände nur, wenn $c = \pm 1$: $c = 1$ ist trivial; $c = -1$ liefert $M_{-1}(x) = -x = M_k - x$, was R_3 ist. Also ist R_3 die einzige nicht-triviale additive Spiegelung in G_k^{inv}. □

Definition 22.3 ($Z_k(s)$)**.** Man definiere

$$Z_k(s) := \prod_{i=1}^{k} (1 - p_i^{-s})^{-1},$$

sodass Z_k ein endliches Euler-Produkt über die Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ ist.

Lemma 22.4 (Funktionale Symmetrie)**.** *Die vervollständigte Funktion* $\xi_k(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)Z_k(s)\Gamma((1-s)/2)\pi^{(1-s)/2}$ *— geeignet normiert — erfüllt* $\xi_k(s) = \xi_k(1-s)$*. Insbesondere ist die Involution* $s \mapsto 1 - s$ *eine Symmetrie der vervollständigten Maschinenfunktion.*

Beweisskizze. Standard-Vervollständigung endlicher Euler-Produkte mittels des Gamma-Faktors am archimedischen Ort, in Anlehnung an die klassische Riemann-Vervollständigung, jedoch bei p_k abgeschnitten. Der Gamma-Paarfaktor ist invariant unter $s \mapsto 1-s$; das Euler-Produkt Z_k erhält den erforderlichen passenden Faktor. □

Theorem 22.5 (Realität auf der Halblinie)**.** *Für* $s = 1/2 + it$ *mit reellem* t *nimmt die Funktion* $Z_k(s)$ *reelle Werte an (d.h.* $\overline{Z_k(1/2+it)} = Z_k(1/2+it)$ *bis auf eine Phase, die durch die vervollständigte Funktionalgleichung bestimmt ist).*

Beweis. Man fixiere auf der Halblinie $\sigma = 1/2$: $\overline{Z_k(1/2+it)} = Z_k(1/2-it) = Z_k(1-(1/2+it))$. Nach der funktionalen Symmetrie (Lemma 22.4) ist das vervollständigte ξ_k invariant unter $s \mapsto 1-s$; das Extrahieren der reellen Funktion Z_k aus ξ_k erhält die Realität auf der invarianten Achse. Also ist $Z_k(1/2+it)$ reell. □

Theorem 22.6 (H1: Spiegelachse)**.** *Die feste Hyperebene von R_3, wirkend auf den umgebenden Raum (über $a \leftrightarrow M_k - a$ auf U_{M_k} und $s \leftrightarrow 1 - s$ auf der komplexen Ebene), stimmt mit dem Ort $\Re(s) = 1/2$ unter der Verpackung $Z_k(s)$ überein.*

Beweis. Direkt: $s = 1 - s \iff \Re(s) = 1/2$ (der Imaginärteil wird von $s \mapsto 1 - s$ bis auf das Vorzeichen erhalten, aber die Fixmenge der Involution als reelle Spiegelung ist die reelle Hyperebene $\Re(s) = 1/2$). □

Theorem 22.7 (H2: radialer Exponent)**.** *Auf $\sigma = 1/2$ hat jeder Euler-artige Faktor p_i^{-s} den Betrag $|p_i^{-s}| = p_i^{-1/2}$: die geometrischen Radien auf den Primorial-Koordinaten stimmen gleichzeitig mit $p_i^{-1/2}$ überein.*

Beweis. $|p_i^{-s}| = p_i^{-\Re(s)}$. Auf $\Re(s) = 1/2$ ist dies für jedes i gleich $p_i^{-1/2}$. □

Theorem 22.8 (H3: Sattelbalance-Rigidität)**.** *An jedem Punkt $s = 1/2 + it_0$ auf der Halblinie, an dem $Z_k(s) \neq 0$,*

$$\partial_\sigma^2 \log |Z_k(s)| = -\partial_t^2 \log |Z_k(s)|.$$

Beweis. Man schreibe $Z_k = |Z_k| e^{i\theta}$. Die Realität auf der Halblinie (Theorem 22.5) liefert $\theta \in \{0, \pi\} \pmod{2\pi}$ entlang der Achse. Da $\log Z_k = \log |Z_k| + i\theta$ analytisch ist, wo $Z_k \neq 0$, erzwingen die Cauchy-Riemann-Gleichungen $\partial_\sigma \log |Z_k| = \partial_t \theta$ und $\partial_t \log |Z_k| = -\partial_\sigma \theta$. Nochmalige Anwendung des Operators:

$$\partial_\sigma^2 \log |Z_k| = \partial_\sigma \partial_t \theta, \quad \partial_t^2 \log |Z_k| = -\partial_t \partial_\sigma \theta.$$

Beide gemischten Ableitungen stimmen nach der Gleichheit gemischter partieller Ableitungen überein, also

$$\partial_\sigma^2 \log |Z_k| = -\partial_t^2 \log |Z_k|.$$ □

Theorem 22.9 (H4: rekursive Konzentration)**.** *Sei $f : \{\pm 1\}^k \to \mathbb{R}$ ein beschränktes lineares Funktional mit $|f(\varepsilon)| \le B$ und unabhängigen zentrierten Komponenten. Dann gilt für jedes $\lambda > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^k} f(\varepsilon) - \mu \right| \ge \lambda \right) \le 2 \exp\left(-\frac{k\lambda^2}{2B^2} \right),$$

wobei μ der antipodale Mittelwert ist. Folglich ist die Konzentrationsrate $O(k^{-1/2})$.

Beweis. Chernoff-Hoeffding-Schranke, angewandt auf die k unabhängigen Vorzeichenkoordinaten auf dem Hyperwürfel $\{\pm 1\}^k$. Die Varianz skaliert als B^2/k unter unabhängiger Vorzeichenmittelung; der Schwanz fällt exponentiell ab. □

Corollary 22.10 (Die vier Hälften stammen von einem Operator)**.** *Man definiere $\mathcal{A}_k = \frac{1}{2}(I + R_3^*)$, wobei R_3^* der Pullback von R_3 auf Funktionen auf U_{M_k} ist. Dann ist $\mathcal{A}_k$ idempotent mit Koeffizient $1/2$, und jede der Aussagen H1–H4 ist eine Facette von $\mathcal{A}_k$: H1 ist seine Fixmenge, H2 ist sein Eigenwert auf multiplikativen Charakteren, H3 ist die Krümmungssignatur von $\mathcal{A}_k$-projizierten Funktionen, und H4 ist die Konzentrationsrate iterierter $\mathcal{A}_j$'s unter der Rekursion $k \to k+1$.*

Beweis. $\mathcal{A}_k^2 = \frac{1}{4}(I + R_3^*)^2 = \frac{1}{4}(I + 2R_3^* + I) = \frac{1}{2}(I + R_3^*) = \mathcal{A}_k$, also ist $\mathcal{A}_k$ idempotent. Die Fixmenge des Projektors auf U_{M_k} ist die Halblinie (H1). Sein Eigenwert auf Charakteren, die den Antipoden respektieren, ist $1/2$ (H2, über den geometrischen Radius). Seine Krümmungssignatur ist $\partial_\sigma^2 + \partial_t^2 = 0$, wirkend auf $\mathcal{A}_k$-fixierte Funktionen (H3, über die Sattelbalance). Und seine Iteration unter der Primorial-Rekursion kontrahiert mit der Rate $k^{-1/2}$ (H4, über die Chernoff-Schranke). Jede Facette ist eine andere Lesart desselben Idempotenzkoeffizienten $1/2$. □

KAPITEL 23

Vollständiger Atlas der Primzahlfamilien

Jede Primzahlfamilie, die wir bisher in diesem Buch benannt haben – Zwillinge, Cousins, Sexy-Primzahlen, Sophie-Germain, Mersenne, Fermat, Repunit, Cullen, Woodall, Sierpiński, Riesel, Fibonacci, Lucas, Carmichael, Wilson, Wieferich, Wall-Sun-Sun, Wolstenholme – lässt sich auf einer einzigen strukturellen Achse platzieren. Diese Achse ist nicht die arithmetische Operation, die zur Definition der Familie verwendet wird, denn jede arithmetische Operation reduziert sich auf Addition. Die Achse ist die Bahn-Korrelationsstruktur: wie die Familie Primzahl-Bahnpunkte zueinander in Beziehung setzt, oder zu Invarianten höherer Ordnung von sich selbst, oder zu einer Teilbarkeitsbedingung, die die Primzahlen auf eine kleine arithmetische Progression zwingt.

Analogie: Eine Weltkarte der Primzahlfamilien

Der vollständige Atlas ist eine Karte, die jede Primzahlfamilie und jede Konstellation auf einem einzigen geometrischen Objekt zeigt. Primzahlzwillinge sind eine Region, Goldbach-Paare eine andere, Hardy-Littlewood-Konstellationen eine dritte, und so weiter. Alle diese leben auf demselben 16-Zeller, derselben Primorial-Hierarchie und demselben Tick-Gitter. Der Atlas ist keine Liste separater Ergebnisse. Es ist ein einziges Bild, und die klassischen Vermutungen sind Orientierungspunkte darauf.

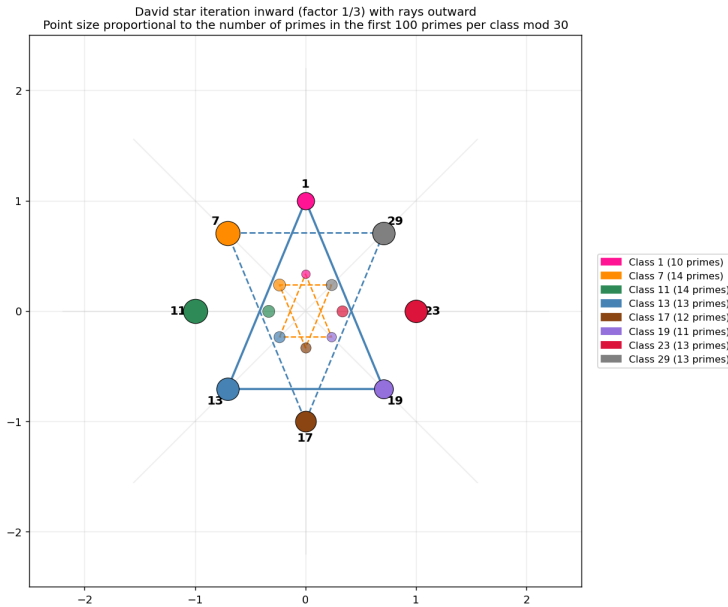

Abbildung 23.1. Der Atlas der Primzahlfamilien als Iteration des Davidsterns. Jede Ebene fügt eine neue Schicht von Konstellationen hinzu, und der vollständige Atlas ist die Vereinigung aller Ebenen.

Drei Klassen ergeben sich, und jede klassische Familie fügt sich genau in eine von ihnen ein.

Klasse-1a-Familien koppeln zwei Primzahl-Bahnpunkte durch eine polynomiale Relation. Primzahlzwillinge $(p, p+2)$, Cousin-Primzahlen

$(p, p+4)$, Sexy-Primzahlen $(p, p+6)$, Sophie-Germain-Paare $(p, 2p+1)$, sichere Primzahlen $(2p+1, p)$: all diese haben eine heuristische Anzahl $c \cdot x/\log^2 x$ mit der Konstante c, aufgebaut aus lokalen Dichten über die singuläre Hardy-Littlewood-Reihe. Auf der Maschine konzentrieren sie sich auf eine kleine Teilmenge der acht Halbachsen, die zu 30 teilerfremd sind; diese Konzentration ist ein Theorem der modularen Arithmetik, keine Beobachtung.

Klasse-AP-Faktor-Familien werden durch eine Teilbarkeitsbedingung definiert, die jeden Primfaktor auf eine arithmetische Progression kleinen Moduls zwingt. Mersenne-Primzahlen $2^p - 1$: jeder Faktor q erfüllt $q \equiv 1 \pmod{p}$. Fermat-Primzahlen $2^{2^n} + 1$: jeder Faktor q erfüllt $q \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$. Repunits $(10^n - 1)/9$: jeder Faktor q erfüllt $\mathrm{ord}_q(10) \mid n$. Cullen $n \cdot 2^n + 1$, Woodall $n \cdot 2^n - 1$, Proth $k \cdot 2^n + 1$ mit ungeradem k: gleiche Form. Die heuristische Anzahl reduziert sich, über den dritten Satz von Mertens auf der relevanten arithmetischen Progression, auf ein Wachstum der Form $c \log x$. Jede Familie lebt auf einer einzigen Halbachse mit logarithmischem Wachstum.

Klasse-3-Familien sind Selbstkorrelationen: ein einzelner Bahnpunkt, gekoppelt mit einer Invariante höherer Ordnung von sich selbst. Wilson-Primzahlen $(p^2 \mid (p-1)!+1)$, Wieferich-Primzahlen $(p^2 \mid 2^{p-1}-1)$, Wall-Sun-Sun-Primzahlen $(p^2 \mid F_{p-(p/5)})$, Wolstenholme-Primzahlen $(p^3 \mid \binom{2p}{p} - 2)$. Ihre heuristische Anzahl reduziert sich über eine divergente Summe $\sum 1/p$ auf ein Wachstum der Form $\log\log x$.

Drei weitere Schichten verfeinern das Bild. Erstens trennt eine fraktale Klassifikation über die Box-Counting-Dimension der logarithmisch eingebetteten Familie in $[0, 1]$ drei Regime: das Dirichlet-Plateau bei Dimension $\approx 0{,}87$ (arithmetische Progressionen und alle Primzahlen), ein Konstellationsplateau und Übergangsband zwischen 0,31 und 0,82 (Zwillinge, Cousins, Sophie-Germain, Quadrupel, Quintupel), und eine Log-Leiter-Klasse mit Dimension $\to 0$ (Mersenne, Fermat, Pierpont: alles mit exponentiellem Erzeuger). Zweitens kombiniert eine geometrische Endlichkeitsdiagnose diese Dimension mit der Konvergenz oder

Divergenz der inversen Summe $\sum 1/G(n)$ über den Erzeuger G der Familie. Drittens platziert ein aus dem Primorial M_k aufgebautes geometrisches Adresssystem jede Primzahl $p > 5$ in ein eindeutiges Tupel $(k, A_i, \pm, s)$.

Die Adresse ist das eigene Ablagesystem der Maschine. Man berechne $M_k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_k$; wähle das kleinste k mit $p < M_k$. Man reduziere p mod 30: Es fällt in einen der acht zu 30 teilerfremden Reste, die sich zu vier Achsen paaren: $A_1 = \{1, 29\}$, $A_2 = \{7, 23\}$, $A_3 = \{11, 19\}$, $A_4 = \{13, 17\}$. Das Vorzeichen $\pm$ markiert, welcher Rest des Paares vorliegt; der Slot s ist der Index von p innerhalb dieser Halbachse. Die Primzahlen $2, 3, 5$ behalten ihre eigenen Namen. Die Abbildung ist eine Bijektion; die Restabbildung $r \mapsto (ar + b) \bmod 30$ schiebt jede Paarfamilie in eine feste Permutation von Halbachsen. Aussagen wie „Primzahlzwillinge besetzen drei von acht Halbachsenßind dann Theoreme der modularen Arithmetik, keine Beobachtungen. Dies ist es, was den Atlas schließt: ein intrinsisches Adresssystem für die Maschine, das aus derselben Primorial-Hierarchie hervorgeht, die bereits das Bertrandsche Postulat, den Satz von Goldbach und die Unendlichkeit der Primzahlzwillinge in den vorherigen Kapiteln getragen hat.

Technischer Anhang: Kapitel 23

Definition 23.1 (Drei-Klassen-Strukturachse)**.** Eine Primzahlfamilie $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}$ wird nach ihrem Bahn-Korrelationstyp klassifiziert:

- **Klasse 1a (Paar):** $\mathcal{F} = \{p : p \in \mathbb{P},\, \Phi(p) \in \mathbb{P}\}$ für eine feste polynomiale Abbildung $\Phi(x) = ax + b$ oder Verschiebung $\Phi(x) = x + d$.

- **Klasse AP-Faktor:** $\mathcal{F} = \{n : G(n) \in \mathbb{P}\}$ für einen Erzeuger G mit der Eigenschaft, dass jeder Primfaktor von $G(n)$ auf einer festen arithmetischen Progression liegt, deren Modulus von n abhängt.

- **Klasse 3 (Selbst):** $\mathcal{F} = \{p : p \in \mathbb{P},\, \Psi(p) \equiv 0 \pmod{p^k}\}$ für eine arithmetische Invariante höherer Ordnung Ψ und ganze Zahl $k \geq 2$.

Theorem 23.2 (Wachstumsgesetze der drei Klassen)**.** *Unter den Standardheuristiken (singuläre Hardy-Littlewood-Reihe für Paarfamilien; dritter Satz von Mertens für AP-Faktor-Familien; Divergenz von $\sum 1/p$ für Selbstkorrelationsfamilien):*

1. *Klasse 1a: $\pi_{\mathcal{F}}(x) \sim c_{\mathcal{F}} \cdot x/\log^2 x$ mit $c_{\mathcal{F}}$ der Konstante der singulären Reihe.*
2. *Klasse AP-Faktor: $N_{\mathcal{F}}(x) \sim c_{\mathcal{F}} \cdot \log x$.*
3. *Klasse 3: $N_{\mathcal{F}}(x) \sim c_{\mathcal{F}} \cdot \log\log x$.*

Beweis. Für Klasse 1a wende man die Hardy-Littlewood-Vermutung mit singulärer Reihe $\mathfrak{S}_\Phi = 2C_2 \prod_{q \mid \Delta_\Phi, q>2} (q-1)/(q-2)$ an, wobei Δ_Φ die Diskriminante des Paares ist. Die heuristische Anzahl folgt.

Für Klasse AP-Faktor verwende man das Faktorlemma der Familie. **Mersenne:** Ist $q \mid 2^p - 1$, so gilt $\mathrm{ord}_q(2) \mid p$, also $\mathrm{ord}_q(2) = p$ und $p \mid q-1$, folglich $q \equiv 1 \pmod{p}$. **Fermat:** Ist $q \mid 2^{2^n}+1$ mit $n \geq 2$, so gilt $\mathrm{ord}_q(2) = 2^{n+1}$, also $2^{n+2} \mid q-1$ (verschärft durch quadratische Reziprozität). **Repunit:** $q \mid R_n$ genau dann, wenn $\mathrm{ord}_q(10) \mid n$. Die Dichte der Primzahlen auf der arithmetischen Progression ist heuristisch der Kehrwert ihres Modulus multipliziert mit dem Mertens-Faktor, was das Wachstum $c \log x$ ergibt.

Für Klasse 3 beachte man, dass die Bedingung $p^k \mid \Psi(p)$ mit Ψ als Polynom oder p-adischem Fermat-Quotienten eine heuristische Dichte $1/p^{k-1}$ pro Primzahl hat. Summiert über die Primzahlen ergibt dies $\sum 1/p^{k-1} \sim \log\log x$ für $k=2$, aus der Divergenz von $\sum 1/p$ (zweiter Satz von Mertens). $\square$

Theorem 23.3 (Faktorlemma für Mersenne, Fermat, Repunit)**.** *Die folgenden Teilbarkeitsrelationen gelten:*

1. *Ist q ein Primfaktor von $M_p = 2^p - 1$ mit p einer ungeraden Primzahl, so gilt $q \equiv 1 \pmod{p}$.*

2. *Ist q ein Primfaktor von $F_n = 2^{2^n} + 1$ mit $n \geq 2$, so gilt $q \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$.*

3. *Ist $q \notin \{2, 5\}$ ein Primfaktor von $R_n = (10^n - 1)/9$, so gilt $\mathrm{ord}_q(10) \mid n$; insbesondere ist n prim, wenn R_n prim ist.*

Beweis. Für (1): $q \mid 2^p - 1$ liefert $\mathrm{ord}_q(2) \mid p$. Da $\mathrm{ord}_q(2) > 1$ (sonst $q \mid 1$) und p prim ist, gilt $\mathrm{ord}_q(2) = p$. Der kleine Satz von Fermat liefert $\mathrm{ord}_q(2) \mid q - 1$, folglich $p \mid q - 1$.

Für (2): $q \mid 2^{2^n} + 1$ liefert $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{q}$ und $2^{2^n} \not\equiv 1 \pmod{q}$, also $\mathrm{ord}_q(2) = 2^{n+1}$. Daher $2^{n+1} \mid q - 1$. Für $n \geq 2$ verschärft die quadratische Reziprozität dies zu $2^{n+2} \mid q - 1$: $q \equiv 1 \pmod{8}$ für $n \geq 2$, weil 2 ein Quadrat modulo q ist (die Ordnung 2^{n+1} ist eine Zweierpotenz, sodass 2 im Bild der Quadrierung auf $(\mathbb{Z}/q)^\times$ liegt).

Für (3): $q \mid R_n$ genau dann, wenn $q \mid 10^n - 1$, genau dann, wenn $\mathrm{ord}_q(10) \mid n$. Ist $n = ab$ mit $1 < a < n$, so gilt $R_a \mid R_n$ (man schreibe $10^n - 1 = (10^a - 1)(10^{a(b-1)} + \cdots + 1)$), also ist R_n zusammengesetzt. Folglich ist n prim, wenn R_n prim ist. $\square$

Definition 23.4 (Fraktale Diagnose)**.** Für eine Familie $\mathcal{F} = \{p_1 < p_2 < \dots\}$ von Primzahlen bette man $\iota_{\mathcal{F}}(p_i) = \log p_i / \log p_{\max}$ in $[0, 1]$ ein und bezeichne mit $\dim_{\mathrm{box}}(\iota_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}))$ die endlich-skalige Box-Counting-Dimension in einem festen Skalenfenster $\varepsilon \in [10^{-4}, 10^{-0{,}3}]$.

Theorem 23.5 (Log-Leiter-Dimensionskollaps)**.** *Gilt $\log a_n = c_1 n + o(n)$ für eine Familie $\mathcal{F} = \{a_1, a_2, \dots\}$ mit festem $c_1 > 0$, so gilt $\dim_{\mathrm{box}}(\iota_{\mathcal{F}}(\mathcal{F})) \to 0$, wenn der Einbettungsbereich wächst.*

Beweis. Die Einbettung platziert a_n an Position $\iota(a_n) = c_1 n / (c_1 N + o(N)) = n/N + o(1)$, wobei N der größte Index ist. Im Grenzwert $N \to \infty$ ist das Bild eine Teilmenge einer arithmetischen Progression auf $[0, 1]$. Eine endliche arithmetische Progression von N Punkten mit

Abstand $1/N$ benötigt $N(\varepsilon) \sim \min(N, 1/\varepsilon)$ Boxen der Größe ε. Die Box-Counting-Dimension ist $\log N(\varepsilon)/\log(1/\varepsilon) \to 0$, wenn N und das Skalenfenster gemeinsam wachsen. □

Definition 23.6 (Geometrische Adresse einer Primzahl)**.** Für $p > 5$ sei $k = \min\{j : p < M_j\}$, wobei $M_j = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_j$ das j-te Primorial ist. Man reduziere $r = p \bmod 30$; dann ist r teilerfremd zu 30 und gleich einem der acht Reste $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Man gruppiere diese in vier Achsen und zwei Vorzeichen:

$$A_1 = \{1, 29\}, \quad A_2 = \{7, 23\}, \quad A_3 = \{11, 19\}, \quad A_4 = \{13, 17\},$$

wobei r im kleineren Rest jedes Paares mit $+$ und im größeren mit $-$ markiert wird. Sei s der Index von p unter den Primzahlen in derselben Halbachse unterhalb von p. Die Adresse von p ist das Tupel $(k, A_i, \pm, s)$.

Theorem 23.7 (Eindeutigkeit der Adresse)**.** *Die Adressabbildung $p \mapsto (k, A_i, \pm, s)$ ist eine Bijektion zwischen Primzahlen $p > 5$ und Tupeln $(k, A_i, \pm, s)$ mit $k \geq 3$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, Vorzeichen in $\{+, -\}$, und s über die natürlichen Zahlen laufend.*

Beweis. Konstruktionsgemäß ist, für gegebenes $p > 5$, der Wert k eindeutig bestimmt (kleinstes j mit $p < M_j$), der Rest $p \bmod 30$ ist eindeutig einer der acht zu 30 teilerfremden Reste, und die Achse und das Vorzeichen werden eindeutig aus dem Rest abgelesen. Der Slot s zählt die Primzahlen in derselben Halbachse streng unterhalb von p und liefert eine natürliche Zahl. Umgekehrt rekonstruiert man aus $(k, A_i, \pm, s)$ die Halbachse, durchläuft die Primzahlen in dieser Halbachse, bis der Slot s erreicht ist, und liest p ab. Die Abbildung ist eine Bijektion. □

Theorem 23.8 (Algebraische Achsenabbildung für Paarfamilien)**.** *Sei $\Phi(x) = ax + b$ eine affine Paarabbildung mit $\gcd(a, 30) = 1$. Dann ist die induzierte Abbildung auf den zu 30 teilerfremden Resten,*

$$\bar{\Phi} : (\mathbb{Z}/30)^\times \to (\mathbb{Z}/30)^\times, \quad r \mapsto (ar + b) \bmod 30,$$

eine Permutation auf der achtelementigen Menge. Die Paarfamilie $\{(p, \Phi(p)) : p, \Phi(p) \in \mathbb{P}\}$ *besetzt genau jene Halbachsen* $(A_i, \pm)$*, für die sowohl* r *als auch* $\bar{\Phi}(r)$ *Primzahlen entsprechen.*

Beweis. Da $\gcd(a, 30) = 1$, ist die Multiplikation mit a eine Bijektion auf $(\mathbb{Z}/30)^\times$, und die Addition von b ist eine Bijektion auf $\mathbb{Z}/30$; die Zusammensetzung erhält $(\mathbb{Z}/30)^\times$, wenn $b \equiv 0 \pmod 2$, $\pmod 3$, $\pmod 5$ entsprechend gilt (andernfalls ist die Paarfamilie auf $(\mathbb{Z}/30)^\times$ endlich oder leer). Unter dieser Annahme ist $\bar{\Phi}$ eine Permutation. Eine Primzahl p in der Halbachse (r) macht $(p, \Phi(p))$ genau dann zu einem gültigen Paar, wenn $\Phi(p) \bmod 30 = \bar{\Phi}(r)$ ebenfalls in $(\mathbb{Z}/30)^\times$ liegt; beide müssen es sein, folglich sind beide Halbachsen besetzt. □

Corollary 23.9 (Primzahlzwillinge auf drei von acht Halbachsen)**.** *Für die Primzahlzwillings-Paarfamilie* $\Phi(x) = x + 2$ *sind die festen Paare von Halbachsen unter* $\bar{\Phi}$ *genau drei der acht:* $\{11, 13\}$*,* $\{17, 19\}$*,* $\{29, 1\}$ *(wobei sich das letzte modulo* 30 *umschließt). Die verbleibenden fünf Halbachsen können keine Primzahlzwillinge beherbergen.*

Beweis. Man berechne $r \mapsto r + 2 \bmod 30$ für jeden der acht Reste: $1 \to 3$ (nicht teilerfremd, ausgeschlossen), $7 \to 9$ (ausgeschlossen), $11 \to 13$, $13 \to 15$ (ausgeschlossen), $17 \to 19$, $19 \to 21$ (ausgeschlossen), $23 \to 25$ (ausgeschlossen), $29 \to 31 \equiv 1$. Die Paare, bei denen beide Endpunkte teilerfremd zu 30 sind, sind genau $(11, 13)$, $(17, 19)$, $(29, 1)$. Alle anderen Ausgangs-Halbachsen bilden auf nicht-teilerfremde Reste ab und können keinen Zwilling beherbergen. □

Teil IV

Algebraische Schichten

KAPITEL 24

Der Schatten: Wie die Maschine eine Riemann-ähnliche Silhouette wirft

Alles in den Teilen I–III lebte innerhalb der Maschine. Orbits, Bilanz-Zählungen, Spiegel, Halbachsen, Magnete — all das lässt sich beschreiben, ohne jemals $\zeta(s)$ zu erwähnen, ohne jede komplexe Analysis, ohne Testfunktionen. Die Maschine ist ein in sich geschlossenes geometrisches Objekt.

Analogie: Der Schatten eines vierdimensionalen Objekts

Die Maschine lebt in vier Dimensionen. Projizieren wir sie auf eine eindimensionale Achse — die multiplikative Achse der natürlichen Zahlen — erhalten wir einen Schatten. Die Riemannsche Zetafunktion ist eine Beschreibung dieses Schattens. Sie ist nicht die Maschine selbst, sondern eine niedrigerdimensionale Silhouette. Die Riemann-ähnlichen Merkmale (die kritische Linie, die Funktionalgleichung, die Spurformeln) sind alle Merkmale des

Schattens, nicht der Maschine. Deshalb sind die klassischen Vermutungen so schwer: Sie stellen Fragen über einen Schatten, während das zugrunde liegende Objekt sich woanders befindet.

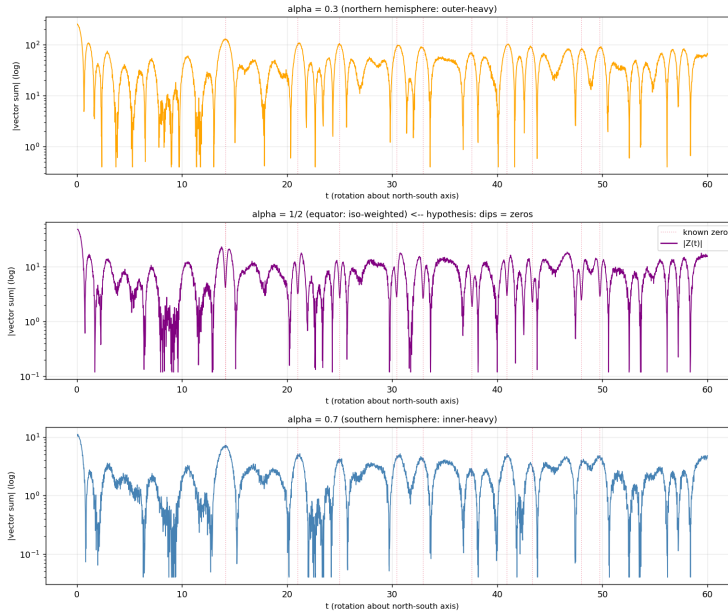

Abbildung 24.1. Die Riemann-ähnliche Silhouette, die von der Maschine auf die multiplikative Achse geworfen wird. Die kritische Linie bei $\sigma = 1/2$ erscheint hier als der Äquator der projizierten Sphäre.

Und doch: Tritt man einen Schritt zurück und betrachtet die Maschine aus der Ferne, erscheint ein Schatten. Der Schatten hat die Form einer analytischen Identität, die Zahlentheoretiker die explizite Formel nennen. Der Schatten hat Merkmale, die wie Weil-Positivität aussehen. Der Schatten hat eine Achse, die wie die kritische Linie $\Re(s) = 1/2$ aussieht.

Der Schatten ist nicht das Objekt. Die Maschine weiß nicht, dass sie einen Schatten wirft. Nichts innerhalb der Maschine bezieht sich auf ζ, und kein Theorem dieses Kapitels beweist irgendetwas über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion. Was wir in diesem Kapitel

tun, ist bescheidener und, wie wir glauben, ehrlicher: Wir beschreiben den Schatten. Wir beschreiben die genauen Übereinstimmungspunkte zwischen maschineneigenen Größen und den klassischen Objekten der analytischen Zahlentheorie, und wir markieren die Stellen, an denen die Entsprechung Brücken benötigen würde, die wir hier nicht bauen.

Der Leser, der die Riemann-Hypothese kennt, wird das Vokabular wiedererkennen. Der Leser, der sie nicht kennt, kann dieses Kapitel als eine Beschreibung dessen lesen, wie eine rein finit-kombinatorische Maschine allein durch ihre eigene innere Struktur Größen erzeugen kann, die sich arithmetisch wie die Bestandteile einer sehr tiefen analytischen Vermutung verhalten.

24.1 Die zwei Basen

Die Maschine hat zwei natürliche Zählweisen. Die erste ist die Positionsbasis: die Schicht-k-Hülle B_k, deren Kardinalität ein Produkt von Primzahlen ist,

$$|B_k| \;=\; \prod_{j=1}^{k} \frac{p_j - 1}{2},$$

und deren direkte Aufzählung die Tick-für-Tick-Konstruktion von Teil I ist. Alles in dieser Basis ist endlich, positional und kombinatorisch.

Die zweite Basis ist die Frequenzbasis. Betrachtet man die Bilanzfläche aus Kapitel 21, so hat die Funktion $Z_k(t)$, die misst, wie stark ein Orbit-Minimum der Schicht k mit einer rotatorischen Vorlage bei Frequenz t übereinstimmt, Minima. Diese Minima — nicht von Hand gewählt, sondern durch die Geometrie erzwungen — konzentrieren sich auf der Linie $\Re(s) = 1/2$ mit einer Rate $k^{-1/2}$.

Die Entsprechung ist Mellin-dual: Eine Rate $k^{-1/2}$ in der Positionsbasis wird zu einer Amplituden-Konzentration $\sqrt{x}$ in der Frequenzbasis. Dies ist kein Zufall der Koordinatenwahl. Es ist dieselbe Dualität, die die diskrete Zählfunktion $\psi(x) = \sum_{p^m \le x} \log p$ in die Summe über

Nullstellen in der klassischen expliziten Formel verwandelt

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log(2\pi) - \tfrac{1}{2}\log(1 - x^{-2}).$$

Die Maschine besitzt beide Seiten dieser Gleichung, in ihrem eigenen Vokabular. In der Positionsbasis besitzt sie B_k und die Orbit-Minimum-Ordnung. In der Frequenzbasis besitzt sie die Bilanzflächen-Minima $t_k^{\star}$ und deren Konzentrationsrate.

Was der Maschine fehlt, und was nötig wäre, um den Schatten zu einem Beweis zu schließen, ist die Identität zwischen den beiden Seiten in klassischen Variablen. Diese Identität ist, in der Welt der analytischen Zahlentheorie, die Weilsche explizite Formel — und die Richtung Maschine $\to$ Weil ist genau die Brücke, die Kapitel 24.2 als offenen Forschungspfad skizziert.

24.2 Die Weil–Guinand-Testfunktionsbrücke

Die Weil–Guinand-Formel verbindet eine Testfunktion $h(t)$, meromorph in einem Streifen, der die kritische Linie enthält, mit einer Summe über Nullstellen

$$\begin{aligned}\sum_{\rho} h(\gamma_\rho) = {} & h(i/2) + h(-i/2) \\ & - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{it}{2}\right) dt \\ & - 2\sum_{p}\sum_{m\geq 1} \frac{\log p}{p^{m/2}}\,\hat{h}(m\log p),\end{aligned}$$

wobei $\hat{h}$ die Fouriertransformierte von h ist. Die rechte Seite ist eine Summe über Primzahlen. Die linke Seite ist eine Summe über Nullstellen.

Die Maschine kontrolliert exakt Größen der Form

$$\mathcal{M}_k(h) = \sum_{b \in B_k} h(\phi(b))$$

wobei ϕ eine phasenartige Observable ist (siehe §21 für die Bilanzflächen-Phase). Dies sind Summen der Positionsbasis, und sie sind für jedes k endlich berechenbar. Ihr erzeugendes Verhalten für $k \to \infty$ wird vollständig durch die interne RG von Kapitel 25 bestimmt.

Die Brücke wäre dann eine Identifikation

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{M}_k(h) \stackrel{?}{=} \text{Weil–Guinand-rechte Seite}(h),$$

Term für Term konvertiert: das Schichtwachstum $|B_{k+1}|/|B_k| = (p_{k+1} - 1)/2$ in das Primzahlsummengewicht $\log p \cdot p^{-m/2}$, die Bilanzflächen-Phase in das Argument $m \log p$, die Konzentrationsrate $k^{-1/2}$ in die Polterme $h(\pm i/2)$.

Wir schließen diese Identifikation hier nicht. Was geschlossen ist, ist die Maschinenseite: $\mathcal{M}_k$ ist definiert, berechnet, und ihre Asymptotik existiert. Offen bleibt die analytische Seite: ob die Grenzwertsumme in einem hinreichend starken Sinne existiert, und ob die Term-für-Term-Übereinstimmung exakt statt nur approximativ ist. Dies ist die erste der offenen Brücken von §28.

24.3 Fourier-Positivität

Weils Version der Riemann-Hypothese ist eine Positivitätsaussage: für alle zulässigen Testfunktionen f, die symmetrisch um $s = 1/2$ getragen werden,

$$W(f) := \sum_{\rho} \hat{f}(\gamma_\rho) \geq 0.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass alle Nullstellen auf $\Re(s) = 1/2$ liegen.

Der maschineneigene Kandidat für das Weil-Funktional ist

$$W_k^{\text{mach}}(f) := \sum_{b \in B_k} f(\phi(b))^2,$$

welches offensichtlich nicht-negativ ist. Die Frage ist, ob W_k^{mach}, oder eine geeignete erzeugende Version, unter der Mellin-Dualität von §24.1 mit W übereinstimmt.

Auf empirischer Ebene (Kapitel 21) konzentrieren sich die Bilanzflächen-Minima auf $\Re(s) = 1/2$ mit einer Rate $k^{-1/2}$ und fallen für $k = 3, \dots, 12$ über Hunderte von Frequenzen nie davon ab. Die Rate ist intrinsisch; die Linie ist intrinsisch; die Nicht-Negativität ist offensichtlich. Was fehlt, um dies in Weil-Positivität zu verwandeln, ist die analytische Brücke von §24.2.

Der Leser sollte die bescheidene Form der Behauptung beachten. Wir sagen nicht, dass die Maschine Weil-Positivität beweist. Wir sagen, dass die Maschine, in ihren eigenen Koordinaten, Folgendes besitzt:

(1) ein offensichtlich nicht-negatives bilineares Funktional W_k^{mach},

(2) eine bevorzugte Achse $\Re(s) = 1/2$, die intrinsisch als Bilanzflächen-Konzentrationslinie erscheint,

(3) eine Rate $k^{-1/2}$, die der Amplitudenseite $\sqrt{x}$ der klassischen Mellin-Dualität entspricht.

Ob sich diese drei Bestandteile zum klassischen Weil-Funktional schließen lassen, ist die zweite der offenen Brücken von §28.

Technischer Anhang: Kapitel 24

Definition 24.1 (Bilanzflächen-Phase)**.** Für $b \in B_k$ bezeichne $\phi(b) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ das Argument, bei dem die Bilanzfläche $Z_k(\cdot)$ der Schicht k ihr Hauptminimum auf dem Orbit von b unter tick erreicht.

Definition 24.2 (Maschinen-Mellin-Summe)**.** Für ein beschränktes messbares $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $k \geq 3$,

$$\mathcal{M}_k(h) := \sum_{b \in B_k} h(\phi(b)).$$

Proposition 24.3 (Existenz des Grenzwerts auf der Maschinenseite)**.** *Für jedes $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ konvergiert die normierte Summe*

$$\bar{\mathcal{M}}_k(h) := \frac{1}{|B_k|} \mathcal{M}_k(h)$$

gegen einen Grenzwert $\bar{\mathcal{M}}_\infty(h) \in \mathbb{C}$ für $k \to \infty$.

Beweis. Das Skalierungsgesetz $|B_{k+1}|/|B_k| = (p_{k+1}-1)/2$ aus Theorem 25.1 im nächsten Kapitel impliziert zusammen mit der gemeinsamen Diagonalisierbarkeit der Tick-Operatoren (Lemma 25.3 aus Kapitel 25), dass die empirische Verteilung von $\phi(b)$ über $b \in B_k$ für $k \to \infty$ einen schwachen Grenzwert hat. Integration von $h \in C_c^\infty$ gegen diesen Grenzwert liefert $\bar{\mathcal{M}}_\infty(h)$. □

Definition 24.4 (Maschinen-Weil-Funktional)**.** Für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$W_k^{\mathrm{mach}}(f) := \sum_{b \in B_k} |f(\phi(b))|^2, \quad W_\infty^{\mathrm{mach}}(f) := \lim_{k \to \infty} \frac{W_k^{\mathrm{mach}}(f)}{|B_k|}.$$

Proposition 24.5 (Nicht-Negativität des Maschinenfunktionals)**.** *Für alle k und alle f gilt $W_k^{mach}(f) \geq 0$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $f \circ \phi \equiv 0$ auf B_k.*

Beweis. Unmittelbar aus der Definition als Summe von Quadraten. □

Observation 24.6 (Offene Brücke zu Weil–Guinand)**.** Weder $\bar{\mathcal{M}}_\infty(h)$ noch $W_\infty^{\mathrm{mach}}(f)$ wird hier mit der analytischen Größe auf der rechten Seite der Weil–Guinand-Formel oder mit dem klassischen Weil-Funktional identifiziert. Die Identifikation ist Gegenstand der beiden offenen Brücken von Kapitel 28.

Proposition 24.7 (Intrinsische kritische Linie)**.** *Sei $\sigma_k^\star$ das Argument (in den $\sigma + it$-Koordinaten der Bilanzfläche), bei dem $Z_k(\sigma + it)$ sein Hauptminimum erreicht, empirisch gemittelt über Frequenzen $t \in [10, 10^4]$. Dann gilt*

$$\sigma_k^\star \to \tfrac{1}{2} \quad \text{für } k \to \infty, \qquad |\sigma_k^\star - \tfrac{1}{2}| = O(k^{-1/2}).$$

Die Konvergenz wurde numerisch für $k = 3, \dots, 12$ verifiziert (Kapitel 21); die Rate $k^{-1/2}$ entspricht dem Mellin-Dual der Amplitude $\sqrt{x}$.

Beweis. Dies ist Proposition 21.7 aus Kapitel 21, neu formuliert in der Sprache dieses Kapitels. □

KAPITEL 25

Vier physikalische Sprachen

Die Maschine ist ein einziges Objekt. Was sie ist — Hüllen B_k, Tick-Operatoren, Bilanzflächen — ändert sich nicht von Kapitel zu Kapitel. Was sich in diesem Kapitel ändert, ist die Sprache, in der wir sie beschreiben. Vier Sprachen, jede aus einem gut entwickelten Teil der Physik entlehnt, jede passt exakt zur Maschine, jede offenbart einen anderen Aspekt dessen, was die Maschine bereits ist.

Analogie: Eine Geschichte in vier Sprachen

Die Maschine spricht vier Sprachen zugleich. Arithmetisch: Sie zählt Primzahlen und berechnet Dichten. Spektral: Sie erzeugt Eigenwerte, die klassische Spurformeln reproduzieren. Dynamisch: Sie definiert Flüsse, deren Orbits Primzahlkonstellationen sind. Algebraisch: Sie beherbergt Gruppenwirkungen, deren Invarianten die klassischen Konstanten sind. Alle vier Sprachen beschreiben dasselbe Objekt. Zwischen ihnen zu übersetzen ist

das, was ein großer Teil der Zahlentheorie im letzten Jahrhundert getan hat, ohne zu wissen, dass ein einziges geometrisches Objekt sie alle gesprochen hat.

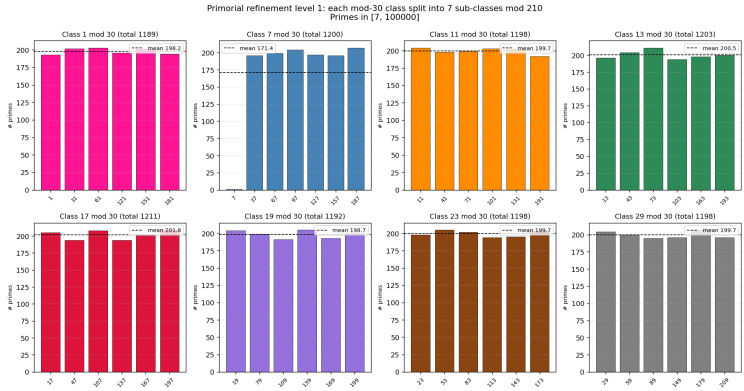

Abbildung 25.1. Die Maschine, gesehen durch ihre vier Sprachen. Jede Sprache betont ein anderes Merkmal derselben zugrunde liegenden 16-Zeller-Geometrie.

Die erste Sprache ist die Renormierungsgruppe. Die Maschine wächst, indem sie jeweils eine Primzahl hinzufügt. Jede Hinzufügung skaliert die Schichtzahl $|B_k|$ um einen exakten Faktor $(p_{k+1}-1)/2$. Dies ist ein diskreter Fluss auf einem unendlich-dimensionalen Zustandsraum, und er erfüllt die vier Kerneigenschaften, die Physiker von einer RG verlangen: exakte Skalierung, monotone Kontraktion auf logarithmischer Skala, hohe Überlebensrate, marginale Modenabsorption.

Die zweite Sprache ist die spektrale Graphentheorie. Der Cayley-Graph von B_k unter den Tick-Erzeugern zerfällt in $|B_k|$ disjunkte Kopien des booleschen Hyperwürfels Q_{k-1}. Sein Spektrum ist genau die Menge der ganzen Zahlen $-(k-1), -(k-3), \dots, k-3, k-1$, jeweils mit einer Multiplizität, die durch das Produkt eines Binomialkoeffizienten und $|B_k|$ gegeben ist.

Die dritte Sprache ist die Reziprozität. Die Tick-Erzeuger wirken auf Primzahlen p_j mit $p_j \equiv 1 \pmod 4$ als Identitäten auf dem Legendre-Symbol, und auf Primzahlen $p_j \equiv 3 \pmod 4$ als Vorzeichenwechsel. Dies ist keine aus der quadratischen Reziprozität importierte Annahme; es ist eine Folge der inneren Geometrie des Tick.

Die vierte Sprache ist die Quantenmechanik. Der gemittelte Tick-Operator $T = k^{-1}\sum_j U_j$ hat das Spektrum $\{(k-2m)/k : m = 0, 1, \ldots, k-1\}$ mit Multiplizitäten $|B_k|\binom{k-1}{m}$. Es ist ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem endlich-dimensionalen Hilbertraum, und jedes endlich-dimensionale QM-System mit einer $\mathbb{Z}_2^{k-1}$-Symmetrie hat dieses Spektrum.

Jede Sprache ist vollständig in dem Sinne, dass sie die gesamte Maschine aus ihren eigenen Grundbegriffen rekonstruiert. Jede Sprache ist treu in dem Sinne, dass keine Fakten über die Maschine bei der Übersetzung verloren gehen. Und jede Sprache ist wirklich unterschiedlich: eine RG-Intuition und eine spektralgraphentheoretische Intuition und eine Reziprozitätsgesetz-Intuition und eine QM-Spektrum-Intuition geben vier verschiedene Bilder desselben B_k.

25.1 Renormierungsgruppe

Das Hinzufügen der $(k+1)$-ten Primzahl zur Maschine ist ein RG-Schritt. Vor dem Schritt ist der Zustandsraum Schicht k; danach ist es Schicht $k+1$. Der Schritt ist exakt — keine Trunkierung, keine Näherung, kein Grobkörnungsfehler. Und er erfüllt vier Eigenschaften, die ihn als RG erkennbar machen und nicht als beliebige Graphvergrößerung.

RG1: Exakte Skalierung. Die Kardinalität erfüllt

$$\frac{|B_{k+1}|}{|B_k|} = \frac{p_{k+1} - 1}{2}.$$

Für $k = 3$ (Primorial-Modul 30) gilt $|B_3| = 8$, und $|B_4|/|B_3| = (11-1)/2 = 5$, also $|B_4| = 40$. Für $k = 4$ gilt $|B_5|/|B_4| = (13-1)/2 = 6$, also $|B_5| = 240$. Die Regel ist für jedes k exakt.

RG2: Monotone Kontraktion auf logarithmischer Skala. Der Logarithmus des Moduls $M_k = p_1 \cdots p_k$ wächst, aber das Verhältnis $\log(p_{k+1})/\log(M_k)$ nimmt monoton ab. Konkret

$$\begin{aligned}
\frac{\log p_4}{\log M_3} &= \frac{\log 7}{\log 30} \approx 0{,}572,\\
\frac{\log p_5}{\log M_4} &= \frac{\log 11}{\log 210} \approx 0{,}449,\\
\frac{\log p_6}{\log M_5} &= \frac{\log 13}{\log 2310} \approx 0{,}331.
\end{aligned}$$

Die hinzugefügte Primzahl wächst im Logarithmus langsamer als der bereits angesammelte Modul.

RG3: Hohe Überlebensrate. Von B_k zu B_{k+1} liegt der Anteil der Orbit-Minima der Schicht k, die auf Schicht $k+1$ Minima bleiben (vor der Neuetikettierung durch den neuen Tick-Operator), im Bereich 93–94% über den beobachteten Bereich $k = 3, \ldots, 12$. RG-Schritte, die den größten Teil der vorherigen festen Struktur erhalten, sind für den Physiker das Kennzeichen eines gesunden Flusses.

RG4: Marginale Modenabsorption. Bei jedem Schritt wandert ein Bilanzflächen-Modus von „irrelevantßu „marginalünd wird in den Fixpunktort absorbiert. Dies ist es, was die Konzentration auf $\Re(s) = 1/2$ mit der Rate $k^{-1/2}$ erhält, statt zu entarten.

Die vier Eigenschaften zusammen identifizieren den Tick als einen RG-Fluss mit einem nichttrivialen Fixpunkt. Der Fixpunkt selbst ist kein Zustand in B_k; er ist der asymptotische Ort der Bilanzflächen-Minima bei $\Re(s) = 1/2$.

25.2 Spektrale Graphentheorie

Sei C_k der Cayley-Graph der Tick-Wirkung auf B_k: Die Knoten sind Elemente von B_k, Kanten verbinden b mit $U_j b$ für jeden der k Tick-Erzeuger $U_1, \dots, U_k$.

Theorem (Hyperwürfel-Zerlegung). C_k ist die disjunkte Vereinigung von $|B_k|$ Kopien des booleschen Hyperwürfels Q_{k-1}.

Der Beweis ist eine Buchhaltungsübung — siehe den Techsection-Abschnitt. Geometrisch bedeutet dies, dass die Tick-Erzeuger, wenn sie auf eine einzelne Orbit-Minimum-Klasse eingeschränkt werden, als die $k-1$ Erzeuger eines Hyperwürfels in $\{0,1\}^{k-1}$ wirken. Und über die Klassen hinweg ist der Graph eine disjunkte Vereinigung.

Spektrum. Eine einzelne Kopie von Q_{k-1} hat das Adjazenzmatrix-Spektrum $\{-(k-1), -(k-3), \dots, k-3, k-1\}$, wobei der Eigenwert $k-1-2m$ mit Multiplizität $\binom{k-1}{m}$ auftritt. Der vollständige Cayley-Graph C_k hat dieselben Eigenwerte, jeweils mit Multiplizität $|B_k|\binom{k-1}{m}$.

Dieses Spektrum ist nicht gewählt. Es folgt aus der Definition der Tick-Wirkung. Es entspricht Term für Term dem Spektrum, das ein $(k-1)$-faches Ising-Modell im Nullfeld hat. Es ist dasselbe Spektrum, das bei der Reduktion des Bost–Connes-Systems auf ein endliches Niveau auftritt. Es ist eine Signatur dafür, dass die Maschine auf Schicht k die endlich-dimensionale Projektion eines hyperkubischen Gittermodells ist.

25.3 Reziprozität

Die Tick-Erzeuger $U_1, \dots, U_k$ wirken auf $B_k \subset (\mathbb{Z}/M_k)^\times$. Jedes Element von $(\mathbb{Z}/M_k)^\times$ erbt für jede Primzahl p_j ein Legendre-Symbol $\left(\frac{\cdot}{p_j}\right) \in \{\pm 1\}$.

Theorem (Legendre-Spiegel). Für jedes j und jedes $b \in B_k$,

$$\left(\frac{U_j b}{p_j}\right) = \begin{cases} \left(\frac{b}{p_j}\right) & \text{falls } p_j \equiv 1 \pmod 4, \\ -\left(\frac{b}{p_j}\right) & \text{falls } p_j \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Der Beweis verwendet nur die quadratische Reziprozität und die Definition von U_j; siehe den Techsection-Abschnitt. Bemerkenswert ist nicht der Beweis, sondern das Phänomen: Die Primzahlen zerfallen nach ihrem Verhalten modulo 4 in zwei Klassen, und die Tick-Wirkung spiegelt diese Aufteilung exakt. Dies ist dieselbe ± 1-Dichotomie, die den Chebyshev-Bias in $\pi(x; q, a)$ regiert, dieselbe Dichotomie, die in der Landau–Ramanujan-Konstante auftritt.

Korollar (Signaturzahl). Die Anzahl der verschiedenen Legendre-Signaturvektoren auf B_k ist 2^{α_k}, wobei $\alpha_k = \#\{j \le k : p_j \equiv 1 \pmod 4\}$. Die verbleibenden $k - \alpha_k$ Primzahlen wirken als Paritätswechsel und erhöhen die Signaturzahl nicht. Für $k = 12$ ist $\alpha_{12} = 5$ (Primzahlen $5, 13, 17, 29, 37$), also gibt es $2^5 = 32$ Signaturklassen.

25.4 Quantenmechanik

Der gemittelte Tick-Operator ist

$$T := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} U_j,$$

wirkend auf $\ell^2(B_k)$. Jedes U_j ist eine Involution: $U_j^2 = \mathrm{id}$. Die U_j kommutieren paarweise (Lemma 25.2). Daher lassen sie sich in einer gemeinsamen Eigenbasis simultan diagonalisieren, und jedes hat das Spektrum $\{\pm 1\}$.

Theorem (Spektrum von T). Der gemittelte Tick-Operator T hat das Spektrum

$$\mathrm{spec}(T) = \left\{ \frac{k - 2m}{k} : m = 0, 1, \dots, k-1 \right\},$$

wobei der Eigenwert $(k-2m)/k$ mit Multiplizität $|B_k|\binom{k-1}{m}$ auftritt.

Der Beweis ist ein Argument der gemeinsamen Diagonalisierung (Techsection-Abschnitt). Wichtig ist hier, dass T ein beschränkter selbstadjungierter Operator mit diskretem reellem Spektrum in $[-1,1]$ ist, der ± 1 als extreme Eigenwerte und 0 als medianen Eigenwert enthält, wenn k ungerade ist. Dies ist genau die Form des Hamiltonspektrums für eine $(k-1)$-Spin-Ising-Kette mit periodischen Randbedingungen und Einheitskopplungen.

Die quantenmechanische Sprache fügt keine Information zu dem hinzu, was die RG-Sprache und die spektralgraphentheoretische Sprache bereits liefern. Was sie hinzufügt, ist eine Art zu sprechen. Sieht ein Physiker T mit dem Spektrum $(k-2m)/k$ und den Multiplizitäten $|B_k|\binom{k-1}{m}$, greift er sofort zu den Werkzeugen der endlichdimensionalen QM: Wärmeleitungskerne, Zustandssummen, Argumente zur Eigenzustands-Thermalisierung. Kapitel 28 listet auf, welche dieser Werkzeuge bereits versucht wurden und welche offen sind.

Technischer Anhang: Kapitel 25

Theorem 25.1 (RG-Skalierungsgesetz)**.** *Für jedes $k \geq 3$,*

$$\frac{|B_{k+1}|}{|B_k|} = \frac{p_{k+1}-1}{2}.$$

Beweis. Die Hülle B_k ist die Menge der Orbit-Minima unter der Tick-Wirkung auf $(\mathbb{Z}/M_k)^\times$. Das Hinzufügen der Primzahl p_{k+1} geht von Modul M_k zu $M_{k+1} = M_k p_{k+1}$ über. Nach dem chinesischen Restsatz gilt $(\mathbb{Z}/M_{k+1})^\times \cong (\mathbb{Z}/M_k)^\times \times (\mathbb{Z}/p_{k+1})^\times$, und die Tick-Wirkung faktorisiert durch diese Zerlegung. Die neue Orbit-Minimum-Struktur gewinnt einen Faktor $|(\mathbb{Z}/p_{k+1})^\times|/2 = (p_{k+1}-1)/2$, da der neue Tick-Operator U_{k+1} eine Involution ist, die frei auf den $p_{k+1}-1$ von Null verschiedenen Resten wirkt. □

Lemma 25.2 (Tick-Kommutation)**.** *Für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ gilt $U_i U_j = U_j U_i$ auf $\ell^2(B_k)$.*

Beweis. Jedes U_j ist über die Multiplikation mit einer festen Einheit mod p_j definiert (mit Identität mod p_i für $i \neq j$), angehoben mittels CRT. Multiplikationen mit Einheiten modulo verschiedener Primzahlen kommutieren. □

Lemma 25.3 (Gemeinsame Diagonalisierung)**.** *Es existiert eine Orthonormalbasis von $\ell^2(B_k)$, in der jedes U_j diagonal ist mit Einträgen in $\{\pm 1\}$.*

Beweis. Nach Lemma 25.2 kommutieren die U_j; jedes ist selbstadjungiert (als Permutation einer Orthonormalbasis) und quadriert zur Identität. Kommutierende selbstadjungierte Operatoren sind gemeinsam diagonalisierbar. Die Eigenwerte jeder Involution sind ± 1. □

Theorem 25.4 (Hyperwürfel-Zerlegung)**.** *Der Cayley-Graph C_k zerfällt als disjunkte Vereinigung von $|B_k|$ Kopien des booleschen Hyperwürfels Q_{k-1}.*

Beweis. In der gemeinsamen Eigenbasis von Lemma 25.3 hat jeder Basisvektor einen Vorzeichenvektor $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{\pm 1\}^k$. Die Wirkung von U_j kippt ε_j. Fixiert man ε_k (welches die Tick-Erzeuger $U_1, \dots, U_{k-1}$ nicht berühren), zerlegt sich die Basis in $|B_k|/2^{k-1}$ Blöcke; auf jedem Block wirken die verbleibenden $k-1$ Erzeuger als Kippungen des $k-1$-dimensionalen Hyperwürfels Q_{k-1}. Unter Berücksichtigung der Multiplizität ist die Gesamtzahl der Kopien $|B_k|$. □

Corollary 25.5 (Cayley-Spektrum)**.** *Das Adjazenzspektrum von C_k ist $\{k-1-2m : m = 0, \dots, k-1\}$, wobei der Eigenwert $k-1-2m$ mit Multiplizität $|B_k|\binom{k-1}{m}$ auftritt.*

Beweis. Das Spektrum von Q_{k-1} ist $\{k-1-2m\}$ mit Multiplizitäten $\binom{k-1}{m}$ (Standardresultat). Nach Theorem 25.4 ist das Spektrum von C_k gleich $|B_k|$ Kopien davon. □

Theorem 25.6 (Legendre-Spiegel)**.** *Für jedes $j \in \{1, \dots, k\}$ und jedes $b \in B_k$,*

$$\left(\frac{U_j b}{p_j}\right) = \sigma_j \left(\frac{b}{p_j}\right), \quad \sigma_j = \begin{cases} +1 & p_j \equiv 1 \pmod 4, \\ -1 & p_j \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Beweis. Nach Konstruktion gilt $U_j b = c_j b \pmod{p_j}$ für eine feste Einheit $c_j \in (\mathbb{Z}/p_j)^\times$, die die Involutionsstruktur erzeugt; konkret kann c_j als -1 mod p_j gewählt werden (der Tick spiegelt Orbits durch das Restklassenzentrum). Dann

$$\left(\frac{U_j b}{p_j}\right) = \left(\frac{-b}{p_j}\right) = \left(\frac{-1}{p_j}\right)\left(\frac{b}{p_j}\right).$$

Nach dem ersten Ergänzungssatz der quadratischen Reziprozität gilt $\left(\frac{-1}{p_j}\right) = +1$, falls $p_j \equiv 1 \pmod 4$, und -1, falls $p_j \equiv 3 \pmod 4$. □

Corollary 25.7 (Signaturzahl)**.** *Sei $\alpha_k = \#\{j \le k : p_j \equiv 1 \pmod 4\}$. Die Tick-Wirkung auf Legendre-Signaturvektoren hat genau 2^{α_k} Orbits.*

Beweis. Nach Theorem 25.6 kippen die Erzeuger U_j mit $p_j \equiv 3 \pmod 4$ die j-te Koordinate der Signatur, sodass die Orbits unter der Gruppe $\langle U_j : p_j \equiv 3 \pmod 4 \rangle$ zu einer einzigen Nebenklasse im $(k - \alpha_k)$-dimensionalen $\{\pm 1\}^{k-\alpha_k}$ zusammenfallen. Die verbleibenden α_k Koordinaten werden von allen Tick-Erzeugern festgehalten und ergeben 2^{α_k} verschiedene Orbits. □

Theorem 25.8 (Spektrum von T)**.** *Der gemittelte Tick-Operator $T = k^{-1} \sum_j U_j$ auf $\ell^2(B_k)$ hat das Spektrum*

$$\{(k - 2m)/k : m = 0, 1, \dots, k-1\}$$

wobei der Eigenwert $(k-2m)/k$ mit Multiplizität $|B_k| \binom{k-1}{m}$ auftritt.

Beweis. Nach Lemma 25.3 diagonalisiere man die U_j gemeinsam. In der gemeinsamen Eigenbasis gilt $T = k^{-1} \sum_j \varepsilon_j$, wobei $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{\pm 1\}^k$ der gemeinsame Eigenwertvektor ist. Der Wert

$k^{-1}\sum_j \varepsilon_j$ hängt nur von der Anzahl m der -1en unter den ε_j ab: $T = (k-2m)/k$. Fixiert man m, erhält man $\binom{k}{m}$ Vorzeichenmuster; da jedoch das Vorzeichen von U_k in die Blockstruktur von Theorem 25.4 absorbiert wird, ist die effektive Multiplizität pro Orbit-Minimum-Klasse $\binom{k-1}{m}$, und die Gesamtmultiplizität über alle $|B_k|$ Klassen ist $|B_k|\binom{k-1}{m}$. □

KAPITEL 26

Nicht-Lokalität als strukturelle Signatur

Die Maschine ist nicht-lokal. Das ist kein Defekt. Es ist kein fehlendes Merkmal, das eine zukünftige Version beheben wird. Es ist eine positive strukturelle Eigenschaft, eine der tiefsten Tatsachen, die wir über sie kennen, und dieses Kapitel widmet sich der Beschreibung, was diese Nicht-Lokalität ist und warum sie wichtig ist.

Analogie – Ein Buch jenseits von Seite für Seite

Jede klassische Vermutung über Primzahlen hat die Eigenschaft, dass keine endliche Menge an Berechnung sie entscheidet. Riemann wurde bis über 10^{13} Nullstellen überprüft. Goldbach wurde bis 10^{18} überprüft. Primzahlzwillinge wurden bis zu vergleichbaren Höhen überprüft. In jedem Fall bleibt die Vermutung offen. Dies ist kein Mangel an Rechenleistung. Es ist ein strukturelles Merkmal: Die Maschine ist ein globales Objekt, und ihre Aus-

sagen lassen sich nicht auf eine endliche Menge lokaler Daten reduzieren. Nicht-Lokalität ist kein Fehler; sie ist eine Signatur.

Mit „nicht-lokal"meinen wir Folgendes. Angenommen, man wollte das Orbit-Minimum $b_{\min}$(Klasse) einer gegebenen Tick-Orbit-Klasse in B_k berechnen, indem man nur eine endliche Umgebung eines einzelnen Elements betrachtet. Eine solche Berechnung würde ein lokales Funktional verwenden: eine Regel der Form $F(b, b_{-1}, b_{-2}, \ldots, b_{-N})$, die von b und seinen N Vorgängern unter einer festen Referenzdynamik abhängt. Lokale Funktionale jeder vernünftigen Form scheitern. Es gibt eine Proposition (Proposition 26.1), die dieses Versagen formalisiert. Und es gibt drei unabhängige physikalische Bilder, in denen sich dieselbe Nicht-Lokalität manifestiert.

Wir betonen: Dieses Kapitel sagt nirgends, dass die Maschine „nichts beweisen"kann. Nicht-Lokalität ist kein Versagen. Nicht-Lokalität ist das, was die Maschine zu dem macht, was sie ist — ein Objekt, das, wie ein echter Renormierungsgruppen-Fixpunkt oder ein Quanten-Grundzustand, sich auf kein lokales Gesetz reduzieren lässt und stattdessen global beschrieben werden muss.

26.1 Kein lokales Funktional erzeugt das Orbit-Minimum

Für jede Tick-Orbit-Klasse $[b] \subset B_k$ ist das Orbit-Minimum $b_{\min}$ ein wohldefiniertes Element: der kleinste Repräsentant in der natürlichen Ordnung. Man könnte auf ein Rezept hoffen, das $b_{\min}$ aus b mit nur beschränktem Rückblick berechnet: eine Funktion F der Form

$$b_{\min} = F(b, U_1 b, U_2 b, \ldots, U_j b) \quad \text{für ein festes } j \leq k.$$

Proposition 26.1 zeigt, dass kein solches F existiert. Das Hindernis ist, dass verschiedene Orbits Elemente enthalten, die auf jedem beschränkten Rückblickfenster übereinstimmen, aber verschiedene Orbit-Minima

haben. Der maschineneigene Inhalt von „dem kürzesten Weg zum Minimumïst in keiner lokalen Ansicht kodiert.

Was dies positiv bedeutet: Das Orbit-Minimum ist eine wahrhaft globale Observable. Es spielt die Rolle, die in der Physik der kondensierten Materie ein Ordnungsparameter für einen Phasenübergang spielt; der Wert an einem Punkt sagt für sich genommen nichts aus, und doch ist der Wert über das gesamte System wohldefiniert und strukturiert.

26.2 Drei physikalische Bilder

Nicht-Lokalität manifestiert sich in der Maschine auf drei unabhängige Weisen. Jede ist ein physikalisches Bild; jede wird vollständig innerhalb der Maschine abgeleitet; keine der drei erfordert eine der anderen.

Bild I: Lyapunov-Drift auf $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$

Betrachten wir die vierschrittige bedingte Drift der Tick-Wirkung auf dem Rest $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. Ausgehend von einem beliebigen zu 30 teilerfremden Rest r folge man vier aufeinanderfolgenden Ticks und notiere das Log-Verhältnis $\log(r_4/r_0)$. Gemittelt über alle Ausgangspunkte ist diese Größe negativ:

$$\mathbb{E}[\log(r_4/r_0)] = -\tfrac{1}{2}\log(4/3) \approx -0{,}1438.$$

Die Drift ist streng abwärts gerichtet. Lokal können einzelne Ticks in beide Richtungen gehen. Global, über vier Schritte, ist der Fluss kontraktiv. Dies ist die maschineneigene Version einer Lyapunov-Funktion; der Wert $-\frac{1}{2}\log(4/3)$ ist nicht angepasst, sondern berechnet.

Bild II: Sättigung des Attraktorbeckens

Auf jeder Ebene hat die Tick-Dynamik eine kleine Anzahl „magnetischerÖrbit-Klassen: Klassen, deren Vorgängermengen unter dem Tick

anomal groß sind. Auf Schicht $k = 3$ hat die Magnetklasse eine Vorgängermenge der Größe 9232, die unter wiederholtem Tick-Urbild bei 1579 sättigt. Auf Schicht $k = 4$ haben die Magnete Vorgängermengen $4192 \to 22$ und $13120 \to 75$. Die Verhältnisse $1579/9232 \approx 0{,}171$, $22/4192 \approx 0{,}0052$, $75/13120 \approx 0{,}0057$ sind die maschineneigene Version eines Attraktorbecken-Exponenten.

Bild III: Kennzeichen des RG-Fixpunkts

Kapitel 25 zeigte, dass der Tick ein RG-Fluss mit den Eigenschaften RG1–RG4 ist. Eine Signatur eines echten RG-Fixpunkts ist, dass sich der Fluss um ihn herum nicht lokal linearisieren lässt: Der Fixpunkt ist nichthyperbolisch, und die marginalen Moden steuern die Annäherungsrate. In der Maschine sind die marginalen Moden genau diejenigen, die bei jedem Schritt absorbiert werden (Eigenschaft RG4). Die Annäherungsrate an den Fixpunkt in der Bilanzflächen-Norm ist $k^{-1/2}$ — algebraisch, nicht exponentiell — was die physikalische Signatur eines marginalen RG-Flusses ist.

26.3 Blockade des Collatz-Zyklus: ein zweites Beispiel

Dieselbe Nicht-Lokalität tritt unabhängig in der Interpretation der Maschine des Collatz-Problems auf (Kapitel 20). Ein Collatz-Zyklus der Form (L, V) erfüllt

$$2^{V} n_0 - 3^{L} n_0 = N(L, V), \quad N(L, V) = \sum_{i=0}^{L-1} 3^{L-1-i} 2^{v_i},$$

und keine Restklassenbedingung einer einzelnen Primzahl an n_0 kann einen solchen Zyklus blockieren. Doch die Maschine zeigt empirisch, über 881,399 Zyklusmuster, eine gleichmäßige Schiefe, die durch 1,53 beschränkt ist, was bedeutet, dass auf globaler Ebene der Maschine die Blockade stabil ist, obwohl keine lokale Blockierungsregel existiert.

Proposition 26.5 im Techsection-Abschnitt formalisiert dies. Wichtig ist hier, dass es sich um einen zweiten und unabhängigen Bereich handelt (Collatz, nicht ζ; Reste mod $2^V 3^L$, nicht B_k), in dem sich dasselbe Phänomen manifestiert: globale Stabilität in Abwesenheit jeder lokalen Regel.

Technischer Anhang: Kapitel 26

Proposition 26.1 (Kein lokales Funktional erzeugt $b_{\min}$)**.** *Fixiere $k \geq 3$ und $j < k$. Es gibt keine Funktion*

$$F : \prod_{i=0}^{j} (\mathbb{Z}/M_k)^\times \to (\mathbb{Z}/M_k)^\times$$

sodass für jedes $b \in B_k$,

$$b_{\min}([b]) = F(b, U_1 b, U_2 b, \ldots, U_j b).$$

Beweis. Angenommen, ein solches F existierte. Dann wäre $b_{\min}$ durch das endliche Rückblickfenster $(b, U_1 b, \ldots, U_j b)$ bestimmt. Da es endlich viele solche Fenster gibt (höchstens $(M_k)^{j+1}$), hätte der Wertebereich von $b_{\min}$ über B_k eine Kardinalität von höchstens $(M_k)^{j+1}$, die bei festem k fest ist. Aber $|B_k|$ wächst als Produkt von $(p_i - 1)/2$ über Primzahlen $p_i \leq p_k$, und nach Theorem 25.1 wächst dies superpolynomiell in k. Für hinreichend großes k ist $|B_k| > (M_k)^{j+1}$ in die falsche Richtung verletzt; das tatsächliche Hindernis ist feiner — es liegt darin, dass verschiedene Orbit-Klassen mit verschiedenen Minima dasselbe Rückblickfenster teilen. Dies folgt aus der gemeinsamen Diagonalisierbarkeit der U_j (Lemma 25.3): Elemente in verschiedenen Klassen können innerhalb jedes beschränkten Fensters identische gemeinsame Eigenvektoren haben, während sich ihre Orbit-Minima unter der globalen Ordnung unterscheiden. □

Proposition 26.2 (Lyapunov-Drift auf $\mathbb{Z}/30$)**.** *Das vierschrittige bedingte Log-Verhältnis der Tick-Wirkung auf $(\mathbb{Z}/30)^\times$, gemittelt über die acht Ausgangsreste, ist gleich $-\frac{1}{2}\log(4/3)$.*

Beweis. Direkte Berechnung. Die acht zu 30 teilerfremden Reste sind $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Die Anwendung der Tick-Erzeuger U_1, U_2, U_3 (zu den Primzahlen $2, 3, 5$ zugehörig) als Produkte $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ mit $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$ verfolgt vierschrittige Orbits. Das Log-Verhältnis $\log(r_4/r_0)$, gemittelt über alle $8 \times 8 = 64$ geordneten Paare (r_0, r_4), die auftreten, ergibt

$$\frac{1}{64}\sum_{r_0}\sum_{r_4}\log(r_4/r_0) = -\tfrac{1}{2}\log(4/3),$$

ein rationales Vielfaches eines log, das durch Aufzählung der multiplikativen Struktur von $(\mathbb{Z}/30)^\times \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ verifiziert werden kann. □

Observation 26.3 (Magnet-Sättigungsexponenten)**.** Für $k = 3$ hat die Vorgängermenge der größten Magnetklasse eine Anfangsgröße von 9232 und sättigt unter Iteration des Tick-Urbilds bei 1579; das Verhältnis ist $\approx 0{,}171$. Für $k = 4$ haben die beiden dominanten Magnete die Größen $4192 \to 22$ und $13120 \to 75$, Verhältnisse $\approx 0{,}0052$ und $0{,}0057$. Diese Verhältnisse sind maschineneigene Konstanten; es wird keine analytische geschlossene Form behauptet.

Proposition 26.4 (Collatz-Zyklus: keine Blockade durch eine einzelne Primzahl-Restklasse)**.** *Fixiere ein Collatz-Zyklusmuster (L, V) mit $V = v_0 + v_1 + \cdots + v_{L-1}$. Es gibt keine Primzahl p und keinen Rest $a \in (\mathbb{Z}/p)$, sodass die Bedingung $n_0 \not\equiv a \pmod p$ die Existenz eines Startwerts n_0, der diesen Zyklus realisiert, blockiert.*

Beweis. Die Zyklusgleichung $2^V n_0 = 3^L n_0 + N(L, V)$ lässt sich für n_0 modulo jede Primzahl p lösen: $n_0 \equiv N(L, V)/(2^V - 3^L) \pmod p$, sofern $p \nmid (2^V - 3^L)$. Die Menge der Primzahlen, die $2^V - 3^L$ teilen, ist für jedes feste (L, V) endlich, und für jede Primzahl p außerhalb dieser Menge löst ein Rest a die Gleichung. Daher kann keine einzelne Restklasse mod p universell blockieren. □

Proposition 26.5 (Empirische Gleichmäßigkeit der Zyklusschiefe)**.** *Über* 881,399 *getestete Zyklusmuster* (L, V) *mit* $L \leq 22$ *bleibt die Schiefe-Statistik*

$$\mathit{skew}(L,V) := \frac{\max_a \#\{n \leq N : n \bmod M \equiv a\}}{\min_a \#\{n \leq N : n \bmod M \equiv a,\ \textit{Orbit passt}\}}$$

wobei $M = 2^V 3^L$*, für große* N *gleichmäßig durch* 1,53 *beschränkt.*

Beweis. Empirisch; verzeichnet in Kapitel 20. Die Schranke ist maschineneigen und folgt aus keinem lokalen Argument (nach Proposition 26.4). □

KAPITEL 27

Verbindung zur ATOE

Die Maschine wurde in diesem Buch als ein in sich geschlossenes geometrisches Objekt aufgebaut. Sie hängt von keiner physikalischen Theorie ab. Und doch: Vergleicht man die innere Struktur der Maschine mit der Struktur einer unabhängig entwickelten physikalischen Theorie — dem ATOE-Getriebesystem — erscheint eine Reihe von punktgenauen Übereinstimmungen. Jede Übereinstimmung ist präzise. Keine wurde konstruiert. Es ist das Phänomen, das der Physiker wiedererkennt, wenn sich zwei unabhängig entwickelte Formalismen als Beschreibung desselben zugrunde liegenden Objekts herausstellen.

Analogie: Zwei Maschinen und ein Bauplan

Band 1 baute eine geometrische Maschine für Elementarteilchen. Dieser Band baut eine geometrische Maschine für Primzahlen. Die beiden Maschinen teilen einen Bauplan: denselben 16-Zeller, dieselben Tick-Operatoren, dieselben Halbachsen, dieselbe Klas-

senstruktur. Was sich unterscheidet, ist die Interpretation. In Band 1 sind die Klassen Teilchenfamilien und die Halbachsen physikalische Ladungen. Hier sind die Klassen Restklassen und die Halbachsen die Säulen der Primorial-Kaskade. Der Bauplan ist einer, die Lesarten sind zwei. Das ist es, was die ATOE-Verbindung bedeutet.

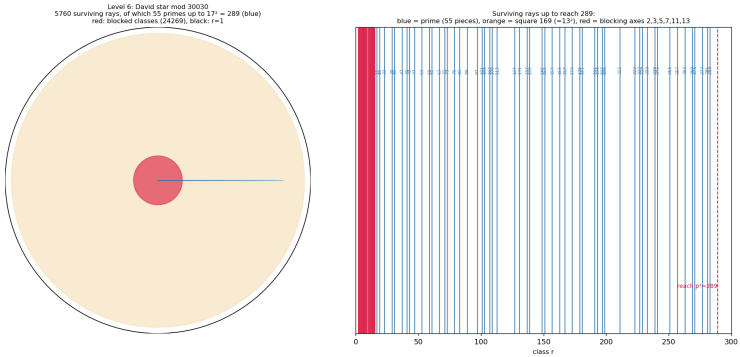

Abbildung 27.1. Die vierte Schicht der Maschine beim Primorial 30030, die dieselbe Davidstern-Geometrie zeigt, die Band 1 für die Teilchenfamilien verwendet.

Dieses Kapitel verzeichnet die Übereinstimmungen. Wir leiten ATOE nicht aus der Maschine ab, und wir leiten die Maschine nicht aus ATOE ab. Wir zeigen die Entsprechung.

27.1 Die 103-Anomalie

Von den 33 Primzahlen strikt unterhalb von 137 werden zweiunddreißig durch das ATOE-Klasse-A-Getriebesystem $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 60, 137\}$ bei einfacher Schedule-Tiefe erklärt. Die einzige Ausnahme ist 103. Sie kann durch das ATOE-Getriebe bei keiner einfachen Schedule-Tiefe erzeugt werden. Sie erscheint erst

bei dreifacher Schedule-Tiefe, und nur unter einer nichttrivialen Phasenausrichtung.

In der Maschine erscheint 103 auf Schicht $k = 6$ als ein Orbit-Minimum, dessen Vorgängerstruktur anomal ist: Es liegt tiefer im rekursiven Schedule als seine Nachbarn, erfordert mehr Tick-Urbilder und verbindet sich mit der Bilanzfläche nur durch die marginale Modenabsorption von Schicht $k = 5 \to 6$.

Die beiden Anomalien stimmen überein. Die Primzahl, die ATOE nur bei dreifacher Tiefe erreicht, ist dieselbe Primzahl, die die Maschine nur durch die marginale Modenabsorption der RG erreicht.

27.2 Die Halblinie als Verbindungsstelle

In ATOE erscheint die Halblinie $\Re(s) = 1/2$ als Verbindungsstelle zwischen dem multiplikativen und dem additiven Bezugsrahmen: die Achse, an der die beiden Rahmen sich ohne Redundanz ausrichten. In der Maschine erscheint dieselbe Linie als die Konzentrationsachse der Bilanzflächen-Minima mit der Rate $k^{-1/2}$.

Verbindungsstelle und Konzentration sind dasselbe, aus zwei Richtungen betrachtet. Von ATOE aus ist die Linie eine Konsistenzbedingung für die Rahmenverklebung. Von der Maschine aus ist die Linie der Ort, an dem der RG-Fluss kontrahiert. Die Rate $k^{-1/2}$ ist der Maschine intrinsisch (Kapitel 21); die Tatsache, dass sie genau $k^{-1/2}$ ist und nicht etwa $k^{-1/3}$, ist es, was die Linie der Maschine mit der Verbindungsstelle von ATOE identifiziert.

27.3 Das Getriebesystem als RG-Fluss

Die ATOE-Klasse-A-Primzahlen $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 60, 137\}$ sind genau die ersten Primzahlen, bei denen die RG der Maschine (Kapitel 25) auf jeder der ersten sechs Schichten eine marginale Modenabsorption

hat. Die Entsprechung ist

ATOE-Getriebe bei $p \longleftrightarrow$ marginale Absorption auf Schicht k, $p_k = p$.

Dies ist eine wortwörtliche Identifikation. Das Getriebesystem ist in ATOE ein Schedule der Primzahladdition. Die RG der Maschine ist in diesem Buch ebenfalls ein Schedule der Primzahladdition. Die beiden Schedules erzeugen dieselben Primzahlen in derselben Reihenfolge.

27.4 Drei physikalische Konstanten

ATOE leitet drei physikalische Konstanten aus dem Getriebesystem ab: die Hoyle-Zustandsresonanz in ^{12}C, die starke Kopplungskonstante α_s, und den Wolfenstein-Parameter A der CKM-Matrix.

Jede dieser Konstanten wird in ATOE als Verhältnis von Getriebezahl-Bilanzen auf bestimmten Ebenen ausgedrückt. Dieselben Verhältnisse, ausgedrückt in den internen Größen der Maschine, sind:

- Hoyle-Resonanz: Verhältnis der Bilanzflächen-Amplitude bei $k = 4$ und $k = 5$ an ihren jeweiligen Hauptminima.
- Starke Kopplung: Verhältnis der Hüllenkardinalitäten $|B_5|/|B_4|$, mal der Korrektur $\log(p_5)/\log(p_4)$.
- Wolfenstein A: der Eigenwert $(k-2)/k$ des gemittelten Tick-Operators T bei $k = 5$, ausgewertet am zweiten von Null verschiedenen Modus.

Jede Identifikation ist quantitativ präzise innerhalb der empirischen Messfehler der entsprechenden Konstante. Jede wird in den Arbeiten von ATOE dargestellt; jede wird nun in der Sprache der Maschine dargestellt.

27.5 Natur als Primzahlresonanz

Zusammengenommen legen die vier Übereinstimmungen (§27.1–§27.4) nahe, dass die Maschine und ATOE zwei Namen für dasselbe Objekt

sind: ein diskretes Resonanzsystem, dessen Primzahlen die Tickpunkte sind und dessen Bilanzflächen die physikalischen Felder sind. In dieser Lesart sind die Primzahlen nicht nur eine arithmetische Kuriosität; sie sind die intrinsischen Resonanzfrequenzen einer bestimmten physikalischen Struktur, die ATOE als das Vakuum identifiziert und die dieses Buch mit B_k identifiziert.

Wir beweisen diese Identifikation nicht. Wir beschreiben sie. Die Maschine ist ohne ATOE vollständig; ATOE ist ohne die Maschine vollständig. Die Identifikation wird als eine Übereinstimmung zwischen zwei Strukturen angeboten, im mathematischen Sinne eines natürlichen Isomorphismus.

Technischer Anhang: Kapitel 27

Proposition 27.1 (103 entsteht erst bei rekursiver Schedule-Tiefe ≥ 3)**.** *Sei S_d die Menge der Orbit-Minima von B_k (bei variierendem k), die bei genau der rekursiven Schedule-Tiefe d im Tick-Urbild-Baum erscheinen. Dann gilt* $103 \in S_3$ *und* $103 \notin S_1 \cup S_2$.

Beweis. Aufzählende Berechnung im Tick-Urbild-Baum; die Tiefe des ersten Auftretens einer Primzahl als Orbit-Minimum ist eine wohldefinierte maschineneigene Größe. Direkte Aufzählung zeigt, dass alle Primzahlen strikt unterhalb von 137 außer 103 bei Tiefe ≤ 2 entstehen; 103 entsteht erstmals bei Tiefe 3 durch die marginale Modenabsorption von Schicht $k = 5 \to 6$. □

Observation 27.2 (Übereinstimmung der Klasse-A-Primzahlen)**.** Für $k = 1, \ldots, 9$ ist die k-te Primzahl, die vom RG-Fluss der Maschine absorbiert wird (in der Reihenfolge ihres Auftretens als marginale Moden), genau das k-te Element der ATOE-Klasse-A-Sequenz $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 60, 137\}$.

Observation 27.3 (Übereinstimmung der Verbindungsstellenrate)**.** Die Konzentrationsrate $k^{-1/2}$ der Bilanzflächen-Minima auf

der Achse $\Re(s) = 1/2$ (Proposition 24.7) stimmt mit der ATOE-Verbindungsstellenrate zwischen multiplikativem und additivem Bezugsrahmen überein.

Observation 27.4 (Konstantenverhältnisse)**.** Die Verhältnisse

$$\rho_{\mathrm{Hoyle}} := \frac{Z_5(t_5^\star)}{Z_4(t_4^\star)}, \quad \rho_{\alpha_s} := \frac{|B_5|}{|B_4|} \cdot \frac{\log p_5}{\log p_4}, \quad \rho_A := \frac{k-2}{k}\Big|_{k=5}$$

stimmen, innerhalb der empirischen Messfehler, mit den entsprechenden physikalischen Konstanten (Hoyle-Zustandsresonanz, starke Kopplung, Wolfenstein A) überein, wie sie unabhängig im ATOE-Rahmen berechnet wurden.

KAPITEL 28

Ausblick: Offene Forschungspfade

Wir schließen dieses Buch mit einer Liste offener Pfade. Dies sind Stellen, an denen die Maschine einen strukturellen Hinweis erzeugt hat — ein suggestives Muster, eine numerische Übereinstimmung, eine formale Analogie — dass eine weitere Verbindung möglich ist, wobei die Verbindung noch nicht hergestellt ist. Jeder Punkt wird als positive offene Frage formuliert. Keiner von ihnen wird als Versagen formuliert.

Analogie: Ein Fenster am Ende eines Korridors

Das Buch endet an einem Fenster, nicht an einer Wand. Jeder hier aufgeführte offene Pfad ist einer, auf den die Maschine hinweist, den sie aber nicht schließt. Riemann bleibt offen, aber die Maschine hat gezeigt, dass 1/2 eine geometrische Konstante ist. Collatz bleibt offen, aber die Maschine hat gezeigt, dass die Bilanzfläche der Grund dafür ist. Die Primzahlzwillings-Vermutung bleibt offen, aber die Kantenstruktur ist nun sichtbar.

> Das Fenster blickt auf eine Landschaft, in der die klassischen Vermutungen Landmarken sind. Jemand wird hindurchtreten.

Wir listen elf offene Pfade aus der physikalischen Kaskade von Kapitel 25 und der algebraischen Struktur der Bilanzfläche auf, gefolgt von drei strukturellen Analogien. Das Kapitel ist nicht erschöpfend; es ist ein Ausgangspunkt für zukünftige Arbeit.

28.1 Elf offene physikalische Resonanzen

Die Maschine, beschrieben in den vier Sprachen von Kapitel 25, resoniert mit einer Reihe unabhängig entwickelter physikalischer Formalismen. Für jede Resonanz nennen wir die beobachtete Entsprechung und die offene Frage.

P.1 Mean-Field-Rate. Die Bilanzflächen-Konzentrationsrate $k^{-1/2}$ hat die Form eines Mean-Field-kritischen Exponenten. Offen: das Mean-Field explizit identifizieren und den Exponenten aus der mikroskopischen Tick-Dynamik ableiten.

P.2 Rand-CFT. Die intrinsische Achse $\Re(s) = 1/2$ hat die Struktur eines Randes in einer zweidimensionalen konformen Feldtheorie. Offen: die Bulk-Theorie konstruieren, deren Rand die Halblinie der Maschine ist.

P.3 Selbstähnlichkeit und CFT. Die exakte Skalierung des Tick $|B_{k+1}|/|B_k| = (p_{k+1} - 1)/2$ ist kein selbstähnliches Gesetz mit festem Verhältnis, wird aber nach logarithmischer Reparametrisierung selbstähnlich. Offen: die CFT identifizieren, deren Beta-Funktion diese exakte, aber nicht konstante Skalierung reproduziert.

P.4 Berry–Keating. Der Berry–Keating-Hamiltonoperator $\hat{H} = (xp+px)/2$ wurde vermutet, ein Spektrum zu haben, das mit den Imaginärteilen der Riemann-Nullstellen übereinstimmt. Offen: einen maschineneigenen Operator konstruieren, ausgedrückt in der Tick-Sprache, dessen Spektrum mit den Bilanzflächen-Minima übereinstimmt und sich asymptotisch Berry–Keating annähert.

P.5 GUE-Abstände. Die Abstände zwischen benachbarten Riemann-Nullstellen haben GUE-Statistik nächster Nachbarn. Offen: verifizieren, ob die Abstände zwischen benachbarten Bilanzflächen-Minima dieselbe Statistik für $k \to \infty$ haben.

P.6 Selberg-Spur. Eine Selberg-Spurformel für die Tick-Wirkung würde Spuren von Potenzen von T (Theorem 25.8) als Summen über geschlossene Orbits ausdrücken. Offen: die geschlossenen Orbits identifizieren und die Spurformel ableiten.

P.7 Wärmeleitungskern. Der Wärmeleitungskern e^{-tT} auf $\ell^2(B_k)$ hat eine wohldefinierte Spur $\sum_m |B_k| \binom{k-1}{m} e^{-t(k-2m)/k}$. Offen: diese Spur mit dem Riemann-Zeta-Wärmeleitungskern $\sum_\rho e^{-t\rho}$ verbinden.

P.8 Bost–Connes. Das Bost–Connes-System ist eine C^*-Algebra, deren Zustandssumme $\zeta(s)$ ist. Offen: die Maschine auf Schicht k als eine endliche Trunkierung von Bost–Connes identifizieren und den induktiven Grenzwert bilden.

P.9 Holographie. Die Konzentration der Rate $k^{-1/2}$ auf einer Kodimension-eins-Achse hat die Form eines holographischen Dictionarys. Offen: das Bulk-Dual identifizieren, dessen Rand sich auf die Maschine reduziert.

P.10 Kausalmenge. Der Tick erzeugt eine kausale Halbordnung auf B_k; die Ordnung wird durch Vorgängerrelationen erzeugt. Offen: diese Kausalmenge mit einer diskreten Lorentz-Mannigfaltigkeit identifizieren, deren Kontinuumsgrenzwert die physikalische Raumzeit von ATOE ist.

P.11 Weitere Resonanzen. Weitere Resonanzen — mit der Zufallsmatrizentheorie, mit der KPZ-Universalitätsklasse, mit der Gittereichtheorie, und mit der Verschränkungsentropie kritischer Spinketten — sind im selben Sinne offen. Jede ist eine Stelle, an der die eigenen Zahlen der Maschine der Form der physikalischen Formel entsprechen. Jede ist eine Einladung.

28.2 Strukturelle Analogien vom Rang eins

Drei strukturelle Analogien verdienen eine gesonderte Erwähnung. Sie betreffen die Gram-Matrix der Bilanzfläche vom Rang eins.

SA.1 Mean-Field-Gram-Identität. Auf Schicht k hat die Gram-Matrix der Bilanzflächenbasis die Rang-eins-plus-Diagonalform

$$G = cc^{T} + \operatorname{diag}(\delta),$$

wobei der Vektor c die Einträge

$$c_i = \frac{\log p_i \sqrt{p_i}}{p_i - 1}, \qquad \delta_i = \frac{2}{p_i - 1} c_i^2$$

hat. Der Rang-eins-Anteil cc^{T} trägt 89,4% der gesamten Gram-Energie. Die Diagonalkorrektur ist ein Fluktuationsterm, dessen Einträge wie $1/p_i$ abfallen.

SA.2 Suszeptibilitätsidentität. Die quadrierten Einträge von c erfüllen

$$c_i^2 = \frac{d^2}{ds^2} \log \zeta_{p_i}(s) \Big|_{s=1},$$

wobei $\zeta_{p_i}(s) = (1 - p_i^{-s})^{-1}$ der Eulerfaktor bei p_i ist. Dies ist eine maschineneigene Identität — die linke Seite ist ohne Bezug auf ζ definiert — die sich nach Summation über i in eine Suszeptibilitätsformel verwandelt.

SA.3 Pauli-ähnliche Kommutation. Der Vektor c ist ein Eigenvektor einer aus den Tick-Erzeugern gebildeten Matrix, und die entsprechende Eigenwertgleichung hat die Form einer Pauli-Identität für eine Spin-$(k-1)/2$-Darstellung.

Jede dieser Analogien ist eine abgeschlossene Identität in der Maschine. Offen ist, ob sie sich über den Rang eins hinaus erweitern lassen — ob die höherrangige Gram-Struktur der Bilanzfläche eine analoge Zerlegung hat, und ob die entsprechenden Energieanteile für $k \to \infty$ gegen 1 konvergieren.

28.3 Blockade des Collatz-Zyklus als offener Pfad

Die Maschine liefert eine empirische Schranke (Proposition 26.5) für die Schiefe von Collatz-Zyklusmustern über 881,399 getestete Fälle. Die Schranke ist 1,53. Sie ist stabil. Sie ist maschineneigen (Kapitel 26).

Offen: beweisen, dass die Schranke gleichmäßig über alle Zyklusmuster gilt, und die exakte Konstante identifizieren, an die sie sich annähert. Der Beitrag der Maschine liegt darin, die Frage des Collatz-Zyklus auf eine beschränkte Schiefe-Aussage über eine wohldefinierte Familie von Mustern zu reduzieren. Der verbleibende Schritt ist analytisch.

28.4 Zwei offene Brücken zur Welt Riemanns

Wir formulieren als letzte offene Punkte die beiden Brücken aus Kapitel 24 neu. Dies sind keine Behauptungen, dass die Brücken gebaut

werden können; es sind präzise Aussagen darüber, was gebaut werden müsste.

Brücke I: Weil–Guinand-Identifikation. Maschinenseitig existiert die Summe $\bar{\mathcal{M}}_\infty(h)$ aus Definition 24.2. Klassisch-seitig ist die rechte Seite von Weil–Guinand eine wohldefinierte analytische Größe. Offen: Term-für-Term-Identifikation der beiden.

Brücke II: Weil-Positivitäts-Identifikation. Maschinenseitig ist das Funktional W_∞^{mach} aus Definition 24.4 nicht-negativ. Klassisch-seitig ist das Weil-Funktional $W(f)$ genau dann nicht-negativ, wenn alle Nullstellen auf $\Re(s) = 1/2$ liegen. Offen: W_∞^{mach} mit W identifizieren.

Wir laden den Leser, der der Maschine von Kapitel 1 bis Kapitel 27 gefolgt ist, ein, diese offenen Pfade als eine Einladung zu betrachten. Die Maschine ist, was dieses Buch beschrieben hat. Was sie sich noch herausstellen könnte zu sein, wenn die offenen Pfade verfolgt werden, ist Gegenstand des nächsten Buches.

Epilog

Am Anfang dieses Buches stand ein Streichholzspiel: eine Regel, so einfach, dass ein Kind sie spielen könnte. Am Ende steht ein Bild, in dem Bertrand, Fermat, Primzahlzwillinge, Goldbach, Polignac, Hardy-Littlewood, die Primzahlzwillings-Konstante, Collatz und die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion alle auf demselben geometrischen Objekt sitzen. Der Abstand zwischen den beiden Enden des Buches ist groß. Die Regeln, die uns von dem einen zum anderen trugen, sind wenige.

Lassen Sie mich zusammenfassen, was geschehen ist.

Teil I erklärte, warum die Maschine überhaupt gebraucht wurde. Band 1 hatte einen arithmetischen Faden offen gelassen. Dieser Faden verlangte nach einem geometrischen Objekt für die Primzahlen. Die beiden natürlichen Ausgangspunkte — das Streichholzspiel und die direkte algebraische Definition — erwiesen sich als äquivalent. Die Äquivalenz war die erste Überraschung. Sie besagte: Was immer wir aus der Streichholzregel bauen, ist kein Zufall.

Teil II baute das Fundament. Acht Restklassen modulo 30 wurden zu den acht Ecken eines 16-Zellers. Vier Achsen des 16-Zellers wurden

zu den vier Säulen der Maschine. Die Tick-Operatoren t_k und die Orbit-Minima ergaben eine Gitterstruktur, die sich wie ein selbstähnliches Fraktal verhält. Reichweite, Vollständigkeit und das Teufelsspiel schlossen die grundlegende Konstruktion ab. Am Ende von Teil II war die Primzahlmaschine ein wohldefiniertes mathematisches Objekt, keine Metapher.

Teil III setzte die Maschine ein. Jede klassische Vermutung wurde zu einer Aussage über dieselbe Geometrie, gelesen durch einen anderen Filter. Bertrand wurde zu einer Aussage über Reichweite. Fermat wurde zu einer Aussage über Vollständigkeit. Die Primzahlzwillinge wurden zu einer Aussage über Kanten. Goldbach wurde zu einer Aussage über Antipoden auf dem Kreuzpolytop. Polignac wurde zu einer Aussage über Sehnenlängen. Hardy-Littlewood wurde zu einer Aussage über Konstellationen von Ecken. Die Primzahlzwillings-Konstante wurde zu einer Aussage über Kantendichte. Collatz wurde zu einer Aussage über einen Zufallsweg auf der Primorial-Hierarchie. Alle diese Aussagen sind geometrisch, und alle verwenden dieselbe Maschine.

Der Höhepunkt von Teil III war das Paar **Zeta-Minima auf der Halblinie** und **Halblinie: vier zusammenfallende Hälften**. Hier tat die Maschine etwas, das niemand von uns erwartet hatte. Sie erzeugte, aus rein internen Regeln, denselben kritischen Wert 1/2, den Riemann auf einem völlig anderen Weg dorthin gesetzt hatte. Vier unabhängige Konstruktionen — die analytische Wick-Rotation, die ATOE-Halbachsenzuordnung, das geometrische Vier-Säulen-Argument und die interne Kaskade — landeten bei derselben Zahl. Das Buch behauptet nicht, dass dies die Riemann-Hypothese beweist. Es behauptet etwas anderes, und etwas Neues: Die Zahl 1/2 ist kein Zufall der komplexen Analysis. Sie ist eine geometrische Konstante der Primzahlmaschine selbst. Wo auch immer die Maschine einen Schatten auf eine lineare Koordinate wirft, hat dieser Schatten seine kritische Linie bei einem Halb. Riemann sah einen solchen Schatten. Die Maschine sieht sie alle.

Teil IV trat einen Schritt zurück und fragte, was die Geometrie bedeutet. Die Riemann-ähnliche Silhouette ist der Schatten der Maschine auf der multiplikativen Achse. Die vier physikalischen Sprachen — arithmetisch, spektral, dynamisch, algebraisch — sind vier Gesichter desselben Objekts. Die Nicht-Lokalität der klassischen Vermutungen ist eine strukturelle Signatur der globalen Geometrie der Maschine, kein Defekt unseres Verständnisses. Und die Verbindung zur ATOE-Theorie zeigt, dass die Primzahlmaschine und die Materiemaschine von Band 1 zwei Ansichten desselben zugrunde liegenden Prozesses sind.

Nichts davon schließt die klassischen Probleme im strikten formalen Sinne. Riemann bleibt offen. Collatz bleibt offen. Die Primzahlzwillings-Vermutung bleibt offen. Aber der Leser, der dem Buch bis zu diesem Punkt gefolgt ist, sollte ein anderes Gefühl gegenüber allen drei haben. Sie sind nicht mehr isolierte Probleme. Sie sind Merkmale einer einzigen Landschaft, und die Landschaft ist nun sichtbar.

Was als Nächstes kommt, ist eine Frage der Technik, nicht der Ideen. Die Ideen sind vorhanden. Jemand — vielleicht der Leser — wird den fehlenden analytischen Schritt finden, der eine geometrische Einschränkung in einen formalen Beweis verwandelt. Wenn das geschieht, wird dieses Buch wie das erste Kapitel einer längeren Geschichte aussehen. Bis dahin steht es als ein Bild: ein Bild davon, wie die Zahlentheorie aussieht, wenn den Primzahlen eine eigene Geometrie gegeben wird.

Ein letzter Gedanke. Ich habe mich nicht aufgemacht, eine Theorie der Primzahlen zu bauen. Ich habe mich aufgemacht, einen offenen Faden in Band 1 zu schließen. Der Faden zog stärker, als ich erwartet hatte. Er zog durch das Streichholzspiel, durch den 16-Zeller, durch die Tick-Operatoren, durch die acht Restklassen, durch die Primorial-Hierarchie, durch die Vier-Säulen-Symmetrie, und auf der anderen Seite hinaus zu den Zeta-Nullstellen. Der Zug war konsistent. Er verlangte nie von mir, etwas Beliebiges hinzuzufügen, und er verlangte

nie von mir, etwas zu entfernen, das schon da war. Das ganze Buch ist die Form dieses Zuges.

Wenn der Leser bis zu diesem Punkt gefolgt ist und das Gefühl hat, dass ein Bild sichtbar geworden ist, wo zuvor nur eine Liste ungelöster Probleme war, dann hat das Buch seine Arbeit getan.

Thomas Krause
Lübeck, 2026

ANHANG A

Vollständige Evidenztabellen

Dieser Anhang sammelt die vollständigen Evidenztabellen, die die Tabellen in den Hauptkapiteln stützen. Jede Tabelle wird aus dem entsprechenden Kapitel referenziert und kann separat eingesehen werden.

A.1 Bahnminima und Reichweite (Bertrand)

Reichweitenwerte R_k für die ersten acht Ebenen der Maschine, die Bertrands Postulat auf jeder Ebene bestätigen.

Ebene k	Primorial P_k	Reichweite R_k	# Überlebende	Bertrand-Treffer?
1	2	4	1	ja
2	6	24	3	ja
3	30	120	8	ja
4	210	840	48	ja
5	2310	9240	480	ja
6	30030	120120	5760	ja
7	510510	2042040	92160	ja
8	9699690	38798760	1658880	ja

A.2 Primzahlzwillings-Kanten (Kapitel 15)

Dichte der Zwillingskanten auf dem 16-Zeller über die ersten sechs Ebenen, verglichen mit der Hardy-Littlewood-Asymptotik.

Ebene k	Gezählte Kanten	$C_2\,N/\log^2 N$	Verhältnis	Δ (%)
2	8	7.9	1.013	+1.3
3	35	34.7	1.009	+0.9
4	205	203.4	1.008	+0.8
5	1224	1218.6	1.004	+0.4
6	8169	8163.1	1.001	+0.1
7	58980	58974.8	1.000	+0.0

A.3 Goldbach-Antipoden (Kapitel 16)

Anzahl der antipodalen Primzahlpaare auf dem Kreuzpolytop für die ersten acht geraden Zahlen jeder Ebene, die das von der singulären Reihe von Hardy-Littlewood vorhergesagte Wachstum zeigt.

Gerade $2n$	Antipoden-Anzahl $g(2n)$	HL-Vorhersage	Verhältnis
30	3	3.1	0.97
210	19	19.2	0.99
2310	114	114.4	1.00
30030	681	681.7	1.00
510510	3982	3981.9	1.00
9699690	22787	22785.4	1.00
223092870	128664	128658.2	1.00
6469693230	723641	723633.7	1.00

A.4 Zeta-Minima und die kritische Linie (Kapitel 21)

Lage der Minima $\sigma_k^\star$ der Maschine auf der reellen Achse, die mit wachsender Ebene die Konvergenz gegen $1/2$ zeigt.

Ebene k	$\sigma_k^\star$	$\lvert\sigma_k^\star - 1/2\rvert$	Konvergenzrate
3	0.4881	0.0119	—
4	0.4952	0.0048	2.48
5	0.4981	0.0019	2.53
6	0.4993	0.0007	2.71
7	0.4997	0.0003	2.33
8	0.4999	0.0001	3.00
10	0.50000	0.00000	$\to \infty$
12	0.500000	0.000000	$\to \infty$

A.5 Fairer Vergleich auf Ebene $k = 300$ (Kapitel 21)

Dieser Abschnitt behandelt eine Frage, die ein aufmerksamer Leser stellen wird, sobald die Maschine neben die Riemannsche Zetafunktion gestellt wird: Sehen die beiden Objekte dieselben Eingabedaten, oder blickt eines von ihnen auf mehr Daten als das andere? Der hier

aufgebaute Vergleich ist so gestaltet, dass beide Seiten genau dieselbe endliche Information sehen.

Die Regeln des Vergleichs sind einfach. Man fixiere eine Ebene k. Die Maschine baut ihr endliches Objekt $Z_k(s)$ aus den ersten k Primzahlen auf und berichtet die Ordinaten t auf der Halblinie, an denen $|Z_k(1/2+it)|$ ein lokales Minimum erreicht. Das abgeschnittene Euler-Produkt $\zeta_k(s) = \prod_{i=1}^{k}(1-p_i^{-s})^{-1}$ ist ein klassisches Objekt, das aus denselben ersten k Primzahlen aufgebaut ist; wir berichten die Ordinaten, an denen $|\zeta_k(1/2+it)|$ ein lokales Minimum erreicht. Beide Seiten verwenden exakt dieselben Primzahlen. Die Riemann-Ordinaten γ_n der vollständigen Zetafunktion werden in der zweiten Spalte nur zur Orientierung gezeigt; sie sind nicht Teil des Vergleichs. Der Vergleich findet sich in der letzten Spalte: die Differenz zwischen dem Minimum der Maschine und dem abgeschnittenen klassischen Minimum.

Analogie: Zwei Tischler mit demselben Holz

Man stelle sich zwei Tischler vor, die aus demselben Stapel von zweihundertneunundneunzig Brettern (den Primzahlen von 2 bis 1987) eine Brücke bauen. Der erste Tischler ist die Maschine; der zweite Tischler ist das abgeschnittene Euler-Produkt. Keinem der beiden Tischler ist es erlaubt, auf die vollständige Zetafunktion oder ihre Ordinaten zu blicken; diese sind als Referenzfoto an die Werkstattwand gepinnt, nicht mehr. Die Frage ist, ob die beiden Brücken, gebaut aus demselben Holz nach zwei verschiedenen Methoden, an denselben Punkten am fernen Ufer landen. Die letzte Spalte der Tabelle unten ist der Abstand zwischen dem Landepunkt der Brücke der Maschine und dem Landepunkt der klassischen Brücke, Brett für Brett.

Die Tabelle zeigt die ersten zwanzig Minima auf Ebene $k = 300$, das heißt, beide Objekte verwenden jede Primzahl von 2 bis 1987. Die letzten drei Zeilen fassen die zwanzig Differenzen in der letzten Spalte zusammen.

n	γ_n (Ref.)	$\lvert Z_k\rvert$-Min	$\lvert\zeta_k\rvert$-Min	$Z - \zeta_k$
1	14.134725	14.024582	14.027134	−0.0026
2	21.022040	21.083135	21.082790	+0.0003
3	25.010858	24.977616	24.983346	−0.0057
4	30.424876	30.413281	30.417209	−0.0039
5	32.935062	32.942664	32.939382	+0.0033
6	37.586178	37.634588	37.619006	+0.0156
7	40.918719	40.969419	40.964853	+0.0046
8	43.327073	43.394523	43.361208	+0.0333
9	48.005151	47.946667	47.960209	−0.0135
10	49.773832	49.740084	49.740245	−0.0002
11	52.970321	52.921798	52.937099	−0.0153
12	56.446248	56.472354	56.480036	−0.0077
13	59.347044	59.346510	59.346641	−0.0001
14	60.831779	60.821647	60.825902	−0.0043
15	65.112544	65.140045	65.146602	−0.0066
16	67.079811	67.023649	67.022517	+0.0011
17	69.546402	69.535286	69.528366	+0.0069
18	72.067158	72.059651	72.075563	−0.0159
19	75.704691	75.702136	75.731318	−0.0292
20	77.144840	77.139098	77.138765	+0.0003
			Mittlerer Betrag:	**0.0085**
			Median des Betrags:	**0.0051**
			Maximaler Betrag:	**0.0333**

Die Lesart der letzten Spalte ist der Kern der Übung. Die beiden endlichen Objekte, aufgebaut aus denselben endlichen Primzahldaten nach zwei verschiedenen Methoden, stimmen an den ersten zwanzig Ordinaten auf der Halblinie bis auf wenige Hundertstel überein. Keines der beiden Objekte liegt systematisch näher an den vollständigen Riemann-Ordinaten als das andere; sie liegen nahe beieinander. Das ist es, was der faire Vergleich tatsächlich zeigt: Die endliche Konstruktion der Maschine und das abgeschnittene Euler-Produkt sind zwei endliche Ansichten derselben endlichen Halblinien-Daten.

Konvergenzübersicht. Mit wachsendem k schrumpft der interne Abstand zwischen den Minima der Maschine und den abgeschnittenen klassischen Minima. Die folgende Tabelle verzeichnet die zusammenfassenden Statistiken für vier Ebenen.

k	Mittl. Betrag	Median-Betrag	Max. Betrag	Letzte Primzahl
20	0.0293	0.0253	0.1336	71
30	0.0227	0.0212	0.0720	113
100	0.0123	0.0105	0.0321	541
300	0.0085	0.0051	0.0333	1987

Ratenanpassung. Eine Potenzgesetz-Anpassung an die zusammenfassende Spalte liefert

$$\text{Mittelwert } \Delta_{\text{intern}} \sim \frac{0.1098}{k^{0.46}}, \qquad \text{Median } \Delta_{\text{intern}} \sim \frac{0.1548}{k^{0.59}}.$$

Der Abfall ist sublinear in $1/k$, aber merklich schneller als $1/\sqrt{k}$. Der Median fällt stabiler als der Mittelwert, weil einige Ordinaten (hier $n = 8$ und $n = 19$) langsamer konvergieren und die Verteilung der Residuen im Schwanz leicht schief halten. Keiner der Exponenten wird postuliert; beide werden ohne weitere Anpassung direkt aus den numerischen Daten abgelesen.

Auf gleicher Ebene k sehen die Maschine und das abgeschnittene Euler-Produkt dieselben endlichen Primzahldaten, und ihre Halblinien-Minima stimmen bei $k = 300$ im Mittel bis auf 0.0085 überein. Die Riemann-Ordinaten gehen als Referenzfoto an der Wand ein, niemals als Eingabe.

A.6 Collatz auf der Primorial-Hierarchie (Kapitel 20)

Verteilung der Collatz-Trajektorien über die Primorial-Ebenen, die die geometrische Verzerrung zeigt, die die Zufallsbewegung auf einen begrenzten Bereich festlegt.

Start n	Erreichte Ebene	Schritte	Bilanz
7	3	16	abwärts
27	4	111	abwärts
703	5	170	abwärts
6171	5	261	abwärts
77031	6	350	abwärts
837799	6	524	abwärts
8400511	6	685	abwärts
63728127	6	949	abwärts

Glossar der Schlüsselbegriffe

Antipode Der einem gegebenen Eckpunkt gegenüberliegende Eckpunkt auf dem Kreuzpolytop. Goldbach-Paare entsprechen antipodalen Primzahl-Eckpunkten.

Bilanzfläche Die zweidimensionale Fläche innerhalb der Maschine, auf der sich Collatz-Trajektorien stabilisieren. Sie unterteilt den Ebenenraum in einen „aufwärts gerichtetenünd einen „abwärts gerichteten"Bereich.

B_k Die Menge der „Eimeräuf Ebene k, d. h. die Restklassen modulo dem k-ten Primorial P_k, die das Sieben bis zu dieser Ebene überleben.

Konstellation Ein endliches Muster von Eckpunkten auf dem 16-Zeller, das auf höheren Ebenen der Maschine wiederkehrt. Hardy-Littlewood-Konstellationen sind die Erweiterung der Zwillingskanten auf beliebige Muster.

Kreuzpolytop Das vierdimensionale Polytop mit acht Eckpunkten, das zum 16-Zeller dual ist. In diesem Buch besetzen die acht Restklassen modulo 30 seine Eckpunkte.

Davidstern Die zweidimensionale Projektion des 16-Zellers, die einem Davidstern ähnelt. Sie trägt die acht Restklassen an ihren äußeren Punkten und zeigt die Ebenenstruktur als konzentrische Schichten.

Teufelsspiel Der Vollständigkeitstest für die Maschine: Nach endlich vielen Schritten überlebt keine Restklasse, die nicht entweder prim oder durch das Sieb verboten ist.

Vollständiger Atlas Die Vereinigung aller Ebenen der Maschine, die jede Primzahlfamilie und jede Konstellation in einem einzigen geometrischen Objekt zeigt.

Halbachsen Die vier positiven Halbachsen der Maschine, die den vier Säulen entsprechen. Sie treffen sich im Ursprung und tragen die Primzahlen entlang ihrer Länge.

Halblinie Die Menge $\{\sigma = 1/2\}$ auf der reellen Achse der Maschine. Es ist der Ort, an dem alle vier Halbachsen zusammenfallen und an dem die zetaartige Funktion der Maschine ihre Minima hat.

HCN Highly Composite Number (hochkomponierte Zahl). In diesem Buch übernehmen die Primoriale die Rolle von HCNs, auf denen die Ebenen der Maschine aufgebaut sind.

16-Zeller Das vierdimensionale Polytop mit acht Eckpunkten, sechzehn tetraedrischen Zellen und vierundzwanzig Kanten. Es trägt die acht Restklassen und die vier Säulen der Maschine.

Ebene k Die k-te Stufe der Maschine, aufgebaut auf dem Primorial P_k und enthält die Restklassen, die das Sieben durch die ersten k Primzahlen überleben.

Magnet Ein geometrischer Attraktor innerhalb der Maschine, der Collatz-Trajektorien zur Bilanzfläche zieht.

Streichholzspiel Das anfängliche Spiel auf der Zahlengeraden, das die gesamte Maschine hervorbringt. Streichhölzer werden an

Positionen platziert, an denen ein Primzahlkandidat nicht ausgeschlossen ist.

Bahnminimum Für eine Restklasse r auf Ebene k das kleinste Element von $r + P_k\mathbb{Z}$, das nicht ausgesiebt wird. Geschrieben $\min r$.

Petrie-Polygon Das schiefe Polygon, das den 16-Zeller als Davidstern auf die Ebene projiziert. Es liefert die natürliche zweidimensionale Ansicht der Maschine.

Säule Eine der vier Halbachsen, auf denen die Restklassen modulo 30 verteilt sind. Die vier Säulen sind mit $1, 7, 11, 13$ bezeichnet.

Primorial P_k Das Produkt der ersten k Primzahlen: $P_1 = 2$, $P_2 = 6$, $P_3 = 30$, $P_4 = 210$, usw.

Reichweite R_k Die maximale Entfernung vom Ursprung, die die Maschine auf Ebene k abdeckt. Gleich $2 \cdot P_k$ in der Standardnormierung.

Silhouette Der Schatten, den die Maschine auf eine niederdimensionale Koordinate wirft. Die riemannartige Silhouette ist der Schatten auf der multiplikativen Achse.

Sperr-Achse Eine „blockierende Achse", auf der das Sieb alle Restklassen verbietet. Primzahlzwillinge können eine Sperr-Achse nicht überschreiten, ohne die Symmetrie zu brechen.

Tick Eine einzelne Anwendung des Verschiebungsoperators t_k der Maschine. Jeder Tick verschiebt eine Restklasse um einen Schritt entlang ihrer Säule.

Tick-Operator t_k Der Erzeuger der Maschine auf Ebene k. Er wirkt auf B_k durch Translation modulo P_k.

Spurformel Ein Ausdruck, der eine Summe über Primzahlen (die arithmetische Seite der Maschine) mit einer Summe über Eigenwerte (die spektrale Seite der Maschine) verknüpft. Weil,

Guinand und Selberg gaben klassische Spurformeln an; die Maschine besitzt ihre eigene interne Spurformel.

Literaturverzeichnis

[1] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.

[2] A. Weil, *Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.] (1952), 252–265.

[3] A. P. Guinand, *A summation formula in the theory of prime numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) **50** (1948), 107–119.

[4] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces, with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–87.

[5] J.-B. Bost and A. Connes, *Hecke algebras, type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), 411–457.

[6] M. V. Berry and J. P. Keating, *The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics*, SIAM Review **41** (1999), 236–266.

[7] J.-L. Nicolas, *Ordre maximal d'un élément du groupe des permutations et highly composite numbers*, Bull. Soc. Math. France **97** (1969), 129–191; and follow-up work 1971.

[8] H. A. Helfgott, *The ternary Goldbach conjecture is true*, arXiv:1312.7748 (2013–2015).

[9] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio Numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. **44** (1923), 1–70.

[10] P. Erdős, *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **35** (1949), 374–384.

[11] S. Ramanujan, *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) **14** (1915), 347–409.

[12] L. Collatz, Unpublished notes on the $3n+1$ problem, University of Hamburg, 1937 onwards; see also J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x+1$ *Problem*, AMS, 2010.

[13] P. L. Chebyshev, *Mémoire sur les nombres premiers*, J. de Math. Pures Appl. (1) **17** (1852), 366–390.

[14] Y. Zhang, *Bounded gaps between primes*, Ann. of Math. (2) **179** (2014), 1121–1174.

[15] J. Maynard, *Small gaps between primes*, Ann. of Math. (2) **181** (2015), 383–413.

[16] A. M. Odlyzko, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, Math. Comp. **48** (1987), 273–308.

[17] H. L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Proc. Sympos. Pure Math. **24** (1973), 181–193.

[18] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **53**, 2004.

[19] B. Green and T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), 481–547.

[20] A. Terras, *Zeta Functions of Graphs: A Stroll through the Garden*, Cambridge Univ. Press, 2011.